Zadania przykładowe do kolokwium nr 2 z MAKO1

1. Macierz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Obliczyć $\det(A)$ oraz $\det\Big((-2)\cdot A^2\Big)$.

2. Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Wyznaczyć rząd macierzy $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Czy ta macierz jest odwracalna?

4. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = max\{1, x^2+y^2\}$.
   Narysować zbiory $f^{-1}\Big(\{0,1,4\}\Big)$ oraz $f^{-1}\Big(f\Big(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y=2\ \wedge x\in[0,2]\}\Big)\Big)$.
   Wyznaczyć zbiór $f\Big(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x+y=1\ \wedge x\in[0,2]\}\Big)$.

5. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = 2\sin x - y + 2$.
   Czy f jest różnowartościowa lub "na"? Czy punkt $(1,3)$ należy do zbioru $f^{-1}\Big((1,3)\Big)$? (uzasadnić)
   Narysować zbiór $f^{-1}\Big([0,\infty)\Big)$. Wyznaczyć zbiór $f\Big([0,3]\times\{0,2\}\Big)$.

6. Dana jest funkcja $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x,y) = |(x-y)^2 - 1|$.
   Narysować zbiory $f^{-1}\Big(\{0,3\}\Big)$ oraz $f^{-1}\Big([1,\ 5)\Big)$. Wyznaczyć zbiór $f\Big([-1,\ 1]\times[-2,\ 1]\Big)$ oraz obraz odcinka o końcach $A=(2,-1)$ i $B=(4,1)$.

7. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 4x+3y+2z-2t &= 11 \\ 3x+y+5z+2t &= -4 \\ 2x+3y+8z+6t &= 9 \\ x+y+11z+10t &= -6 \end{cases}$

8. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 5y+4z+t &= -8 \\ x-y-3z+2t &= 6 \\ 2x+5y+5t &= 0 \end{cases}$

   Podać postać wszystkich możliwych rozwiązań oraz wybrać jakieś rozwiązanie szczególne i sprawdzić, czy spełnia ten układ.

9. Dana jest macierz $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
   Podać wzór $\varphi((x,y,z))$. Wyznaczyć macierz $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\varphi)$, gdzie baza $\mathcal{A} = ((1,-2,0),(0,4,1),(0,1,0))$.
   Wyznaczyć wymiary przestrzeni $\mathrm{Ker}\varphi$ oraz $\mathrm{Im}\,\varphi$.

10. Wyznaczyć macierze $M^{\mathcal{E}_4}_{\mathcal{E}_2}(\varphi)$ i $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$,

$\varphi((x, y, z, t)) = (y - t, x + z)$, gdzie baza $\mathcal{A} = ((0, 1, 0, -1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 1, 0))$,

a $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, -1))$. Wyznaczyć wymiar i bazę przestrzeni Kerφ. Czy wektor (π, π^2) należy do przestrzeni Im φ?

11. Dana jest macierz $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{E}_3}(\varphi) = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -5 \\ -10 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

gdzie baza $\mathcal{A} = ((0, 3, 2), (-1, 2, 0), (0, 1, 1))$.

Wyznaczyć macierz $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(\varphi)$. Podać wzór $\varphi((x, y, z))$. Wyznaczyć wymiary przestrzeni Kerφ oraz Im φ.