

1. Sprawdzić tezę tw. Greena dla całki

(a) $\oint_C (xy - x)dx + (y - x^2)dy$, gdzie C jest brzegiem kwadratu $\overline{D} = [0, 2] \times [0, 2]$;

(b) $\oint_C (x + y)(x - y)dx$, gdzie C jest brzegiem tej ćwiartki koła $x^2 + y^2 \leq 9$, na której brzegu leżą punkty $(1, 1)$ i $(0, 3)$.

2. Wykorzystując całkę krzywoliniową, obliczyć pole deltoidy czyli figury ograniczonej krzywą $x(t) = 2 \cos t + \cos 2t$, $y(t) = 2 \sin t - \sin 2t$, $t \in [0, 2\pi]$.

3. Wykazać, że wartość podanej całki nie zależy od drogi całkowania, a następnie ją obliczyć.

(a) $\int_{\widehat{AB}} (3x^2 - 2xy + y^2)dx + (2xy - x^2 - 3y^2)dy$
po dowolnym łuku gładkim o początku $A = (2, -1)$ i końcu $B = (1, 0)$;

(b) $\int_{\widehat{AB}} (2x \cos y - y^2 \sin x)dx + (2y \cos x - x^2 \sin y)dy$
po dowolnym łuku gładkim o początku $A = (\pi, 0)$ i końcu $B = (\pi, \pi)$;

(c) $\int_{\widehat{AB}} (2x + 2ye^{2xy})dx + (2xe^{2xy} + 2)dy$
po dowolnym łuku gładkim od $A = (1, 0)$ do $B = (2, \ln 2)$.

4. Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną $\int_L \frac{dl}{2 + xy}$ po odcinku $L = \overline{AB}$, gdzie $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$.

5. Obliczyć długość

(a) wykresu funkcji $y(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ dla $x \in [-1, 1]$;

(b) kardiody: $x(t) = 2 \cos t - \cos 2t$, $y(t) = 2 \sin t - \sin 2t$, $t \in [0, 2\pi]$

6. Wyznaczyć współrzędne środka masy (x_m, y_m)

(a) jednorodnej łamanej ABC (składa się ona z dwóch odcinków),

(b) jednorodnej łamanej ABCD (składa się ona z trzech odcinków),

gdzie $A = (0, 1)$, $B = (0, 0)$, $C = (1, 0)$, $D = (1, 1)$.

Jeśli $\varrho(x, y)$ jest gęstością masy łuku L , to całka $M = \int_L \varrho(x, y) dl$ wyraża masę tego łuku.

Całki $M_X = \int_L y \varrho(x, y) dl$ i $M_Y = \int_L x \varrho(x, y) dl$ przedstawiają momenty statyczne łuku L :

M_X – względem osi OX, M_Y – względem osi OY.

Współrzędne środka masy łuku L o gęstości $\varrho(x, y)$ wyrażają się następująco:

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M} \right).$$