Analiza 2 – Inżynieria Biomedyczna

Z_3

1. Obliczyć całkę potrójną

   (a) $\displaystyle\iiint\limits_{\overline{V}} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$ gdzie $\overline{V} = \{(x,y,z):\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x+y+z \leqslant 1\}$;

   (b) $\displaystyle\iiint\limits_{\overline{V}} e^{x+y+z}dxdydz$ gdzie $\overline{V} = \{(x,y,z):\ x \leqslant 0,\ -x \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant -x\}$;

   (c) $\displaystyle\iiint\limits_{\overline{V}} x^2(x+y)(x+y+z)^2dxdydz$ (wykorzystać zamianę zmiennych)
   gdzie $\overline{V} = \{(x,y,z):\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 1 \leqslant x+y \leqslant 2,\ 2 \leqslant x+y+z \leqslant 3\}$;

   (d) $\displaystyle\iiint\limits_{\overline{V}} \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, gdzie $\overline{V}$ – bryła ograniczona stożkiem $z = \sqrt{x^2+y^2}$
   i płaszczyzną $z = 1$;

   (e) $\displaystyle\iiint\limits_{\overline{V}} (x+z)dxdydz$, gdzie $\overline{V} = \{(x,y,z):\ \sqrt{x^2+4y^2} \leqslant z \leqslant 2\}$;

   (f) $\displaystyle\iiint\limits_{\overline{V}} (x^2+y^2+1)dxdydz$ gdzie $\overline{V} = \{(x,y,z):\ x^2+y^2 \leqslant 2z \leqslant 4\}$;

   (g) $\displaystyle\iiint\limits_{\overline{V}} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ gdzie $\overline{V} = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \leqslant 0\}$;

   (h) $\displaystyle\iiint\limits_{\overline{V}} \frac{2z}{x^2+y^2+z^2+4}dxdydz$, gdzie $\overline{V} = \{(x,y,z):\ x \leqslant 0,\ z \leqslant 0,\ 2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\}$;

   (i) $\displaystyle\iiint\limits_{\overline{V}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ gdzie $\overline{V} = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z\}$.

2. Przy pomocy całki potrójnej obliczyć objętość bryły

   (a) obrotowej, której powierzchnia boczna powstaje przez obrót wokół osi 0X
   krzywej $z = \cos x$ dla $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

   (b) obrotowej, której powierzchnia boczna powstaje przez obrót wokół osi 0Z
   krzywej $z = \cos x$ dla $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

   (c) wyciętej z kuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2$ przez stożek $z = \sqrt{x^2+y^2}$;

   (d) $V = \{(x,y,z):\ 0 \leqslant z \leqslant e^4 - e^{x^2+y^2},\ x+y \geqslant 0\}$;

   (e) $V = \{(x,y,z):\ x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 4-y^2\}$.

3. Wyznaczyć środek masy

   (a) jednorodnego stożka: $2\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 2$;

   (b) jednorodnej bryły $\overline{V} = \{(x,y,z):\ z \geqslant 0,\ 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\}$.