1. Wyznaczyć wszystkie wartości i wektory własne odpowiadające tym wartościom dla podanych macierzy. Które z macierzy są diagonalizowalne?

1.1. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ 1.2. $\begin{bmatrix} j & 3 \\ -3 & j \end{bmatrix}$ 1.3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ 1.4. $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Wyznaczyć macierz odwracalną C i macierz diagonalną D, takie że $A = CDC^{-1}$.

2.1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ 2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 6 & 8 & -6 \end{bmatrix}$ 2.3. $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -6 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

Wyznaczyć wartości własne macierzy A^2 oraz macierzy A^{-1} z przykładu 2.3.

3. Sprawdzić, czy wektory $(0, -4, 2)$ i $(4, 0, -2)$ są wektorami własnymi przekształcenia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi((x, y, z)) = (x, -2x - y - 6z, x + y + 4z)$.
Wyznaczyć macierz przekształcenia φ w bazie składającej się z wektorów własnych.

4. Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie rzutem prostokątnym na prostą o równaniu $y = \frac{1}{2}x$.
Wskazać bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$ składającą się z wektorów własnych przekształcenia φ i wyznaczyć macierz przekształcenia φ w tej bazie oraz macierz tego przekształcenia w bazie kanonicznej.

5. Przekształcenie liniowe $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dane jest wzorem $\psi((x, y, z)) = (x - z, 2x - 2z, 3x - 3z)$.
Czy wektor $(2, -7, 2)$ jest wektorem własnym tego przekształcenia?
Wyznaczyć wszystkie wartości własne i przestrzenie własne przekształcenia ψ.

6. Dane jest przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, którego macierz w bazach kanonicznych

$$M_{E_2}^{E_2}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Czy wektor $(\pi, 3\pi)$ jest wektorem własnym tego przekształcenia?
Wyznaczyć przestrzenie $\operatorname{Ker}\varphi$ oraz $\operatorname{Im}\varphi$.