

1. Sprawdzić, czy dana funkcja jest przekształceniem liniowym.

a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi((x, y)) = (y, xy, x - y)$

b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi((x, y, z)) = (x - 3, 0, y - z)$

c) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi$ – symetria względem prostej o równaniu $y = x + 1$.

2. Podać macierz przekształcenia φ w bazach kanonicznych oraz wyznaczyć bazy jego jądra i obrazu.

a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi((x, y, z)) = (2z, 3x, x - 2z)$

b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \varphi((x, y)) = (x - 2y, 0, 4y - 2x, 0)$

c) $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi((x, y, z, t)) = (x - 2y, x + 2z, x - y + z)$

d) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x] \quad (\varphi(w))(x) = (x - 1)w'(x) - 2w(x)$

3. Dla przekształcenia $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określonego wzorem $\varphi((x, y, z)) = (2x - 3y, x - y + 2z)$

podać macierze: $M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(\varphi), M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{A}}(\varphi), M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}(\varphi), M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi),$

gdzie baza $\mathcal{A} = ((1, 0, -3), (0, 1, -2), (0, 1, 3)), \mathcal{B} = ((3, 2), (5, 3)).$

4. Uzasadnić, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe φ , które spełnia podane warunki.

$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi((0, 4, 0)) = (4, 0, -8), \quad \varphi((-1, 1, 0)) = (0, 0, 0), \quad \varphi((2, 1, 1)) = (1, 0, -2).$

Jaki jest rząd tego przekształcenia? Wyznaczyć $\text{Im } \varphi$ oraz $\text{Ker } \varphi$ podając bazy tych przestrzeni.

5. Dana jest macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

w bazach $\mathcal{A} = ((2, -1), (-1, 1)), \mathcal{B} = ((3, -1, 1), (2, 0, -3), (1, -1, 0)).$

Wyznaczyć macierz przekształcenia φ w bazach kanonicznych i podać wzór przekształcenia φ .

Sprawdzić, czy wektor $(1, 2)$ należy do $\text{Ker } \varphi$, a wektor $(1, 0, -1)$ należy do $\text{Im } \varphi$.

6. Niech $O_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie obrotem o kąt α wokół punktu $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

Wyznaczyć wzór tego przekształcenia oraz jego macierz w bazach kanonicznych.

7. Niech L będzie prostą o równaniu $y = 3x$. Niech $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \psi$ – rzut prostokątny na prostą L .

Wyznaczyć jądro i obraz tego przekształcenia.

Niech $B = (v_1, v_2)$ – baza przestrzeni \mathbb{R}^2 , gdzie $v_1 \in L, v_2 \perp L$. Zapisać macierz $M_B^B(\psi)$.

Wyznaczyć macierz $M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(\psi)$ oraz zapisać wzór przekształcenia ψ .