

1. Czy W jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V nad ciałem \mathbb{K} ?

a) $V = \mathbb{R}^2$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 0\}$

b) $V = \mathbb{R}^3$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y)^2 = z^2\}$

c) $V = \mathbb{R}^3$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y)^2 + z^2 = 0\}$

d) $V = \mathbb{C}$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $W = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = 3\}$

e) $V = \mathbb{R}[x]$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $W = \{w \in \mathbb{R}[x] : w'(1) = 0\}$

2. Czy układ \mathcal{A} jest liniowo niezależny? Czy jest bazą przestrzeni V nad \mathbb{K} ?

a) $V = \mathbb{R}^3$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\mathcal{A} = ((2, 1, 1), (3, 0, 1), (0, 3, 1))$

b) $V = \mathbb{C}$ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\mathcal{A} = (1 - 2j, 3 + j)$

c) $V = \mathbb{C}$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\mathcal{A} = (1 - 2j, 3 + j)$

d) $V = \mathbb{R}_2[x]$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\mathcal{A} = ((x + 2)^2, x + 2)$

3. Podać współrzędne wektora $(-7, \pi, \pi)$, w bazie $\mathcal{B} = ((7, 8, 0), (0, 1, 8), (1, 0, \pi))$.

4. Układ $\mathcal{B} = (x + 1, 3x + 4)$ uzupełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$ nad \mathbb{R} (dodać takie wektory, żeby powiększony układ był bazą), a następnie zapisać wektory $2x + 2$ oraz $x^3 + x^2 + x$ w tej bazie. Wyznaczyć wektor, który w tej bazie ma współrzędne $(2, 0, 1, -1)$.

5. Wyznaczyć bazę i wymiar przestrzeni V nad \mathbb{R} .

a) $V = \text{Lin}\{(1, 0, 3, 1), (0, 1, 2, -1), (1, -1, 1, 2)\}$

b) $V = \text{Lin}\{(1, 0, 2), (2, 1, 1), (3, 2, 0), (-1, 3, -11), (2, -1, 7)\}$

c) $V = \text{Lin}\{v_1 - v_2 + v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3 + v_4, 2v_1 + v_2 - v_3 + v_4\} \subseteq W$,

gdzie układ (v_1, v_2, v_3, v_4) jest pewną bazą przestrzeni W nad \mathbb{R} .

6. Dane są podprzestrzenie przestrzeni \mathbb{R}^4

$$U = \text{Lin}\{(3, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}, \quad W = \text{Lin}\{(3, 0, -2, 0), (0, 1, 0, 1)\}.$$

Wyznaczyć wymiary przestrzeni $U + W$ oraz $U \cap W$.