MATEMATYKA KONKRETNA 1 $\quad Z_5$

1. Wyznaczyć pierwiastki wielomianu i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej. Określić krotności pierwiastków. Ile jest różnych pierwiastków rzeczywistych? Ile zespolonych?

   a) $w(z) = z^{17} + z^{12} - z^7 - z^2$ b) $w(z) = z^9 + 4z^6 + 4z^3$ c) $w(z) = z^7 - jz$

2. Liczba $z_0 = 1+2j$ jest jednym z pierwiastków wielomianu $w(z) = z^4+2z^3+2z^2+10z+25$.

   Wyznaczyć pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

3. Rozłożyć wielomian w na czynniki liniowe.

   a) $w(z) = z^4 + 6z^2 + 25$ b) $w(z) = z^4 - (3 + 2j)^4$ c) $w(z) = (1 + j\sqrt{3})z^4 + 8$

4. Podać ogólną postać rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste nad $\mathbb{R}$ (bez wyznaczania wartości współczynników).

   a) $\dfrac{2x^2 - 7x}{(x-3)^3(x^2+4)^2}$ b) $\dfrac{3x^4 - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}$ c) $\dfrac{5x^3}{(x^4+4)^2}$

5. Wyznaczyć rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste nad $\mathbb{R}$.

   a) $\dfrac{4x - 10}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ b) $\dfrac{8}{x^2 - 4x + 2}$

   c) $\dfrac{x^2 - 3x + 6}{x^4 - 5x^2 + 4}$ d) $\dfrac{2x^3 + 5x^2 + 3x + 1}{x^2(x^2+1)^2}$

6. Podać ogólną postać rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste nad $\mathbb{C}$ (bez wyznaczania wartości współczynników).

   a) $\dfrac{4z + 3j}{z^2 - 2jz + 3}$ b) $\dfrac{z^4 + 3z - 2}{z^2(z^2+9)(z+3j)^2}$ c) $\dfrac{z^7 + z^2}{(z^4+4)^2}$

Jeżeli $g(z) = (z - z_1) \cdot ... \cdot (z - z_n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $z_1, ..., z_n$ są różnymi liczbami zespolonymi, to współczynniki rozkładu

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_1}{z - z_1} + ... + \frac{a_n}{z - z_n}$$

wyrażają się wzorami $a_i = \dfrac{f(z_i)}{g'(z_i)}$ dla $i = 1, ..., n$.

(Wzory na pochodne wielomianów zespolonych są takie same, jak dla wielomianów rzeczywistych.)

---

7. Wyznaczyć rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste nad $\mathbb{C}$.

   a) $\dfrac{4z^2 + 1}{z^4 - 1}$ b) $\dfrac{z^{2020}}{z^{2021} + 1}$