Zestaw powtórzeniowy do kolokwium 1 z MAKO1

1. Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $(z+1-2j)^4 + (2\sqrt{3}+2j)^2 = 0$

   i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej. Rozwiązania podać w postaci kanonicznej.

2. Rozwiązać równanie $(z-4j)^3 = (2-2j)^4 \cdot e^{\frac{3\pi}{2}j}$.

   Rozwiązania zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej i zapisać w postaci kanonicznej.

3. Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej zbiór rozwiązań równania $z^2|z|^3 = j\overline{z}^5$.

4. Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej zbiór rozwiązań równania $\operatorname{Re}(j\pi z^6) = 0$.

5. Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$\Big\{z \in \mathbb{C} : \ |z+2j| \leqslant \Big|\frac{50j}{(1+2j)^4}\Big| \ \ \vee \ \arg(-4-4j) \leqslant \arg(z+4j) < \arg(2-2j)\Big\}.$$

6. Naszkicować na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$\Big\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im}[z(1-j)] < \operatorname{Re}(\overline{2-7j}) \ \ \wedge \ \arg\Big(z - \frac{1}{j^5}\Big) \in \Big(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\Big)\Big\}.$$

7. Funkcję wymierną $f(x) = \dfrac{3+x}{(x^4-x^2+16)(x^2-4x)^2}$ $\qquad \Big(x_1 = \dfrac{3+j\sqrt{7}}{2}\Big)$

   zapisać jako sumę ułamków prostych nad $\mathbb{R}$ (bez wyznaczania współczynników).

8. Funkcję wymierną $f(x) = \dfrac{-4x^3}{7(x^4+16)(x+4)^2}$

   zapisać jako sumę ułamków prostych nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$ (bez wyznaczania współczynników).

9. Funkcję wymierną $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x-2)(x^2+4)}$

   zapisać jako sumę ułamków prostych nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$ (wyznaczyć współczynniki).

10. Czy prawdziwe jest następujące zdanie? (Odpowiedź uzasadnić.)

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ (x \cdot y = 7 \ \Rightarrow \ x \cdot y > 17)$$

   Zapisać zaprzeczenie tego zdania bez użycia symbolu negacji.

11. Czy prawdziwe jest następujące zdanie? (Odpowiedź uzasadnić.)

$$\exists y \in \mathbb{R}\ \Big(\big(\exists x \in \mathbb{R}\ \ y > x^2\big) \ \Rightarrow \ \big(\forall x \in \mathbb{R}\ \ y < x^2\big)\Big)$$

Zapisać zaprzeczenie tego zdania bez użycia symbolu negacji.

12. Dla rodziny zbiorów $A_t = \{(x,y) \in [0,3\pi] \times \mathbb{R} : y \leqslant t \cdot \sin x\}, \;\; t \in \mathbb{R}$

    narysować zbiory $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} A_t, \quad \bigcap\limits_{t\in\mathbb{R}_+} A_t, \quad \bigcup\limits_{t\in\mathbb{Z}} A_t, \quad \bigcap\limits_{t\in\mathbb{Z}} A_t.$

13. Dana jest rodzina trójkątów $(\blacktriangle_t)_{t\in\mathbb{R}}$ o wierzchołkach $A = (0,0), \; B = (2,0), \; C_t = (t,2)$.

    Narysować zbiory $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} \blacktriangle_t, \quad \bigcap\limits_{t\in\mathbb{R}} \blacktriangle_t \quad \bigcap\limits_{t\in(0,2)} \blacktriangle_t, \quad \bigcup\limits_{t\in(0,2)} \blacktriangle_t.$

14. Na przedziale $[-2,2]$ określona jest relacja równoważności: $\quad x \sim y \Leftrightarrow \lfloor x^2 \rfloor = \lfloor y^2 \rfloor$.

    Wyznaczyć klasy $\left[\sqrt{2}\right]_\sim$ oraz $\left[\frac{1}{2}\right]_\sim$. Podać liczbę klas abstrakcji.

15. Relacja równoważności $\sim$ określona jest na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ następująco:

    $$x \sim y \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} \in \mathbb{Q}.$$

    Wykazać jej przechodniość oraz wyznaczyć po trzy elementy klas $[\pi]_\sim$ oraz $[-\sqrt{7}]_\sim$.