Elementy teorii mocy

Równoliczność zbiorów

Def. 1. *Mówimy, że zbiory X i Y są* ***równoliczne****, jeśli istnieje bijekcja $f : X \to Y$. O funkcji f mówimy wtedy, że ustala równoliczność zbiorów X i Y.*

Dla równolicznych zbiorów X i Y stosujemy oznaczenie $X \sim Y$.

Istnienie bijekcji oznacza możliwość połączenia w pary elementów zbioru X z elementami zbioru Y.

Uwaga: Zbiory skończone są równoliczne, gdy mają tyle samo elementów.

Wniosek: Żaden podzbiór właściwy zbioru skończonego nie jest z nim równoliczny.

Def. 2. *(Dedekind XIX w.) Mówimy, że* ***zbiór jest nieskończony****, jeśli jest równoliczny z pewnym swoim podzbiorem właściwym.*

Uwaga: Jeżeli A jest zbiorem nieskończonym i $A \subseteq B$, to zbiór B też jest nieskończony.

Przykłady zbiorów równolicznych

- $\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N} \qquad (n \mapsto 2n)$
- $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R} \qquad (x \mapsto \mathrm{tg}(x))$
- $(0;1) = (0;1]$,
- $2^X \sim \{0,1\}^X$, dla $X \neq \emptyset$.

Własności równoliczności

Tw. 1. *Dla dowlnych zbiorów X, Y, Z zachodzą własności:*

1. $X \sim X$,
2. $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$,
3. $X \sim Y \wedge Y \sim Z \;\Rightarrow\; X \sim Z$.

Twierdzenie powyższe pozwala klasyfikować zbiory za pomocą relacji równoliczności i uogólnić pojęcie liczebności zbioru na zbiory nieskończone.
Każdemu zbiorowi X przypisuje się obiekt zwany **liczbą kardynalną** lub **mocą zbioru** (oznaczany $|X|$ lub $\overline{\overline{X}}$) w taki sposób, że dwóm zbiorom przypisana jest ta sama liczba kardynalna wtedy i tylko wtedy, gdy są to zbiory równoliczne.

$$\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \Leftrightarrow X \sim Y$$

Tw. 2. *Dla dowlnych zbiorów A, B, C, D zachodzą własności:*

1. $A \sim B \ \wedge \ C \sim D \quad \Rightarrow \ A \times C \sim B \times D$,

2. $A \sim B \ \wedge \ C \sim D \ \wedge \ A \cap C = \emptyset = B \cap D \quad \Rightarrow \ A \cup C \sim B \cup D$,

3. $A \sim B \ \Rightarrow \ 2^A \sim 2^B$.

Zbiory przeliczalne

Def. 3. *Mówimy, że zbiór X jest* ***przeliczalny****, jeśli $X \sim \mathbb{N}$.*
Zbiór nazywamy ***co najwyżej przeliczalnym****, gdy jest skończony lub przeliczalny.*

Moc zbioru przeliczalnego oznaczamy $\aleph_0$ – alef zero
($\aleph$ – pierwsza litera alfabetu hebrajskiego).

Uwaga: Zbiór jest przeliczalny, gdy z jego elementów można utworzyć ciąg nieskończony, w którym żaden wyraz się nie powtarza
(elementy można ponumerować, tworząc nieskończoną listę).

Uwaga: Pozdbiór zbioru przeliczalnego jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym.

Stw. 1. *Suma zbioru skończonego i przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym.*

Stw. 2. *Suma dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.*

Stw. 3. *Skończona suma zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.*

Wniosek: Zbiór liczb całkowitych jest przeliczalny,
gdyż $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : \mathbb{N} \in \mathbb{N}\}$.

Stw. 4. *Iloczyn kartezjański dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.*

Stw. 5. *Iloczyn kartezjański skończonej liczby zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.*

Wniosek: Zbiór $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych jest zbiorem przeliczalnym.

Stw. 6. *Przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym, czyli*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ A_n \sim \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \sim \mathbb{N}$$

.

Przykład 1. Zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach wymiernych jest przeliczalny.

Przykład 2. Zbiór $\mathbb{Q}[x]$ wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych jest przeliczalny.

Przykład 3. Zbiór wszystkich liczb algebraicznych jest przeliczalny.

Liczby algebraiczne to rzeczywiste pierwiastki wielomianów o współczynnikach wymiernych.

Zbiory nieprzeliczalne

Def. 4. *Zbiór nazywamy* ***nieprzeliczalnym****, jeśli jest nieskończony i nie jest zbiorem przeliczalnym.*

Uwaga: Zbiór A jest nieprzeliczalny $\Leftrightarrow$ nie można wszystkich jego elementów ustawić w ciąg, to znaczy żaden nieskończony ciąg o wyrazach z tego zbioru nie będzie zawierał wszystkich elementów tego zbioru. Istnieje taki $a \in A$, który nie jest wyrazem tego ciągu. Elementów zbioru nieprzeliczalnego nie da się ponumerować - nie można utworzyć z nich nieskończonej listy.

Przykład: zbiór liczb rzeczywistych z przedziału $(0; 1)$ jest nieprzeliczalny.

Stw. 7. *Zachodzą następujące fakty:*

1. *Jeżeli A – zbiór nieprzeliczalny i $A \subseteq B$, to B – nieprzeliczalny.*
2. *Jeżeli A – nieprzeliczalny i $A \sim B$, to B – nieprzeliczalny.*
3. *Jeżeli $A \sim \mathbb{N}$ i $A \subseteq B$ i B – nieprzeliczalny, to $B \setminus A$ – nieprzeliczalny.*

Wnioski:

1. Zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny.
2. Każdy przedział zawarty w $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny.
3. Zbiór liczb niewymiernych jest nieprzeliczalny.
4. Zbiór liczb przestępnych jest nieprzeliczalny.
   Zbiór **liczb przestępnych** to dopełnienie zbioru liczb algebraicznych w $\mathbb{R}$.

Uwaga: Moc zbioru $\mathbb{R}$ nazywamy **continuum** i oznaczamy gotycką literą $\mathfrak{c}$.

Zachodzi $\mathfrak{c} \neq \aleph_0$, ponieważ $\mathbb{R} \nsim \mathbb{N}$.

Porównywanie mocy zbiorów

Niech $X,\ Y$ – zbiory, $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{n}$, $\overline{\overline{Y}} = \mathfrak{m}$.

Def. 5. *Mówimy, że liczba kardynalna $\mathfrak{n}$ jest nie większa od liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$), gdy zbiór X jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru Y.*

Gdy $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ i $\mathfrak{n} \neq \mathfrak{m}$, to mówimy, że $\mathfrak{n}$ jest mniejsza od liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$).

Uwaga: Jeśli $X \subseteq Y$, to $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$.

Wniosek: $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{c}$ i $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$, więc $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ (bo $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ i $\mathbb{N} \neq \mathbb{R}$).

Tw. 3. *Dla dowolnych niepustych zbiorów X i Y następujące warunki są równoważne:*

1. $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$;
2. *istnieje funkcja różnowartościowa* $f : X \to Y$;
3. *istnieje funkcja "na"* $g : Y \to X$

Stw. 8. *Jeśli* $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{c}, \overline{\overline{Y}} = \aleph_0$ *i* $Y \subseteq X$, *to* $\overline{\overline{X \setminus Y}} = \mathfrak{c}$.

Przykład.

Na mocy stwierdzenia 8. dostaniemy, że zbiór liczb niewymiernych ma moc $\mathfrak{c}$.

Także zbior liczb przestępnych ma moc $\mathfrak{c}$.

Tw. 4. *Dla dowolnych liczb kardynalnych* $\mathfrak{n}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p}$ *zachodzą własności:*

1. $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{n}$;
2. $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ *i* $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{p}$, *to* $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{p}$;
3. $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ *i* $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, *to* $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$.

Uwaga: Własność *3.* znana jest jako Tw. Cantora-Bernsteina.
Równoważne sformułowanie: $X \subseteq Y \subseteq Z$ i $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Z}}$, to $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{Z}}$.
Twierdzenie to pozwala znacznie uprościć dowody równoliczności zbiorów.

Tw. 5. *Jeśli* $\mathfrak{n}, \mathfrak{m}$ *– liczby kardynalne, to* $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$ *lub* $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$,

czyli dowolne liczby kardynalne są porównywalne.

Tw. 6. *(Cantora) Dla dowolnego zbioru X prawdziwa jest nierówność*

$$\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{2^X}}$$

Przykład: Zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ ma moc większą niż $\mathfrak{c}$.

$\{f : \mathbb{R} \to \{0,1\}\} = \{0,1\}^{\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{R}}$

$\overline{\overline{\{0,1\}^{\mathbb{R}}}} = \overline{\overline{2^{\mathbb{R}}}} > \mathfrak{c}$.

Wniosek: Istnieje nieskończenie wiele liczb kardynalnych większych od $\aleph_0$.

$$\aleph_0 = \overline{\overline{\mathbb{N}}} < \overline{\overline{2^{\mathbb{N}}}} < \overline{\overline{2^{2^{\mathbb{N}}}}} < \dots$$

Wniosek: Nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów.

Arytmetyka liczb kardynalnych

Dodawanie

Niech $\mathfrak{n} = \overline{\overline{X}}$, $\mathfrak{m} = \overline{\overline{Y}}$ i $X \cap Y = \emptyset$, wtedy $\mathfrak{n} + \mathfrak{m} = \overline{\overline{X \cup Y}}$.

Działanie dodawania liczb kardynalnych jest poprawnie określone, gdyż prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Tw. 7. *Jeśli* $\overline{\overline{X_1}} = \overline{\overline{X}}$, $\overline{\overline{Y_1}} = \overline{\overline{Y}}$, $X \cap Y = \emptyset, X_1 \cap Y_1 = \emptyset$, *to* $\overline{\overline{X \cup Y}} = \overline{\overline{X_1 \cup Y_1}}$.

Przykład: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 + n = \aleph_0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Własności dodawania liczb kardynalnych

1. $\mathfrak{n} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ przemienność $(X \cup Y \sim Y \cup X)$
2. $\mathfrak{n} + (\mathfrak{m} + \mathfrak{p}) = (\mathfrak{n} + \mathfrak{m}) + \mathfrak{p}$ łączność $X \cup (Y \cup Z) \sim (X \cup Y) \cup Z)$
3. Jeśli $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$, to $\mathfrak{n} + \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{m} + \mathfrak{p}$ monotoniczność
4. Jeśli $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$ lub $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, to $\mathfrak{n} + \mathfrak{m} = \max\{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}\}$.

Wniosek: $\mathfrak{c} + n = \mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Mnożenie

Niech $\mathfrak{n} = \overline{\overline{X}}$, $\mathfrak{m} = \overline{\overline{Y}}$, wtedy $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m} = \overline{\overline{X \times Y}}$.

Działanie mnożenia liczb kardynalnych jest poprawnie określone, gdyż prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Tw. 8. *Jeśli* $\overline{\overline{X_1}} = \overline{\overline{X}}$, $\overline{\overline{Y_1}} = \overline{\overline{Y}}$, *to* $\overline{\overline{X \times Y}} = \overline{\overline{X_1 \times Y_1}}$.

Własności mnożenia liczb kardynalnych

1. $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ przemienność $(X \times Y \sim Y \times X)$
2. $\mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p}) = (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}) \cdot \mathfrak{p}$ łączność $X \times (Y \times Z) \sim (X \times Y) \times Z)$
3. $\mathfrak{n} \cdot (\mathfrak{m} + \mathfrak{p}) = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m} + \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p}$ rozdzielność mnożenia względem dodawania
   $X \times (Y \cup Z) \sim (X \times Y) \cup (X \times Z)$
4. Jeśli $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$, to $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p}$ monotoniczność
5. Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $n \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m} + \ldots + \mathfrak{m}$ (n składników)

6. Jeśli $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$ lub $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, to $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m} = \max\{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}\}$.

Wniosek: $n \cdot \mathfrak{c} = \aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Przykład: Kwadrat $[0;1] \times [0;1]$ jest zbiorem mocy continuum.

Wniosek: $\overline{\overline{\mathbb{R}^2}} = \mathfrak{c}$.

Przykład: Zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach 0 lub 1 jest równoliczny z przedziałem $[0;1]$.

Wniosek: $\overline{\overline{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}} = \overline{\overline{2^{\mathbb{N}}}} = c = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

Potęgowanie liczb kardynalnych

Niech $\mathfrak{n} = \overline{\overline{X}}$, $\mathfrak{m} = \overline{\overline{Y}}$, wtedy $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}} = \overline{\overline{X^Y}} = \overline{\overline{\{f : Y \to X\}}}$.

Działanie potęgowania liczb kardynalnych jest poprawnie określone, gdyż prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Tw. 9. *Jeśli* $\overline{\overline{X_1}} = \overline{\overline{X}}$, $\overline{\overline{Y_1}} = \overline{\overline{Y}}$, *to* $\overline{\overline{X^Y}} = \overline{\overline{X_1^{Y_1}}}$.

Wniosek: $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Własności potęgowania liczb kardynalnych

1. $\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}+\mathfrak{p}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m}} \cdot \mathfrak{n}^{\mathfrak{n}}$ $\quad X^{Y \cup Z} \sim X^Y \times X^Z$
2. $(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ $\quad (X \times Y)^Z \sim X^Z \times Y^Z$
3. $(\mathfrak{n}^{\mathfrak{m}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{n}^{\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p}}$ $\quad (X^Y)^Z \sim X^{Y \times Z}$
4. Jeśli $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$, to $\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}} \leqslant \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$
5. Jeśli $\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$, to $\mathfrak{p}^{\mathfrak{n}} \leqslant \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}}$

Przykład: $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$
Zbiór wszystkich nieskończonych ciągów o wyrazach naturalnych jest mocy continuum.

Hipoteza continuum

Czy istnieje zbiór nieprzeliczalny mocy mniejszej niż continuum?

Gdyby taki zbiór nie istniał, to każdy podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ byłby co najwyżej przeliczalny albo miał moc continuum. Hipotezę, że tak właśnie jest, czyli że **każdy nieprzeliczalny podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma moc continuum** sformułował Georg Cantor i nazwał ją **hipotezą continuum**.

Inaczej można sformułować tę hipotezę następująco:

Nie istnieje liczba kardynalna większa niż $\aleph_0$ ***i jednocześnie mniejsza niż*** $\mathfrak{c}$.

Nie udało się tej hipotezy udowodnić ani obalić.

Wykazano, że na gruncie powszechnie przyjętej formalizacji matematyki (aksjomaty ZFC) **nie da się odpowiedzieć** na postawione powyżej pytanie.

Hierarchia alefów

Tw. 10. *Dla każdej liczby kardynalnej* $\mathfrak{m}$ *istnieje jej następnik* $\mathfrak{m}^+$, *czyli najmniejsza liczba kardynalna od niej większa.*

$\aleph_0$ – najmniejsza nieskończona liczba kardynalna;
$\aleph_1 = \aleph_0^+$ – następna liczba kardynalna po $\aleph_0$;
$\aleph_2 = \aleph_1^+$ – następnik liczby $\aleph_1$;
...

$\aleph_1$ to najmniejsza nieprzeliczalna liczba kardynalna.

Hipoteza continuum: $\aleph_1 = \mathfrak{c}$

Uogólniona hipoteza continuum

Generalna hipoteza continuum – **GCH**, to przypuszczenie, że dla każdej nieskończonej liczby kardynalnej $\mathfrak{m}$ zachodzi równość:

$$2^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}^+.$$

ZFC to powszechnie uznany system aksjomatów teorii mnogości Zermelo-Fraenkla z aksjomatem wyboru.

W 1938 r. austriacki matematyk Kurt Gödel udowodnił, że bazując na systemie aksjomatów ZFC nie da się obalić generalnej hipotezy continuum, czyli że założenie prawdziwości tej hipotezy nie prowadzi do sprzeczności z aksjomatami teorii mnogości. Oznacza to, że GCH jest niesprzeczna z aksjomatami ZFC.

W 1963 r. amertkański matematyk Paul Cohen udowodnił, że opierając się na systemie ZFC, nie można udowodnić hipotezy continuum (dokładnie, że negacja tej hipotezy jest niesprzeczna z aksjomatami ZFC). Razem z twierdzeniem Gödla oznacza to, że **hipoteza continuum jest niezależna od aksjomatów ZFC**. Jest ona zdaniem nierozstrzygalnym teorii mnogości.