

PRZESTRZENIE LINIOWE

Def. **Przestrzenią liniową (wektorową) nad \mathbb{K}** nazywamy trójkę $((V, +), (\mathbb{K}, \oplus, \odot), \cdot)$ o następujących własnościach:

- 1) $(V, +)$ jest grupą przemienną,
- 2) $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ jest ciałem,
- 3) $\cdot : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ jest działaniem zewnętrznym ciała \mathbb{K} na zbiór V spełniającym dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ i dowolnych $u, v \in V$ następujące warunki:
 - 1° $(\alpha \oplus \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
 - 2° $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
 - 3° $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \odot \beta) \cdot v$
 - 4° $1 \cdot v = v$ (gdzie 1 oznacza jedynekę ciała \mathbb{K}).

Elementy zbioru V nazywamy **wektorami**, elementy zbioru \mathbb{K} nazywamy **skalarami**.

Działanie \cdot nazywa się **mnożeniem wektorów przez skalary**.

Przykład 1**1.** Przestrzeń \mathbb{R}^2 nad \mathbb{R}

Wektory: $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Dodawanie: $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

mnożenie przez liczbę: $\alpha \cdot v_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

2. Przestrzeń \mathbb{R}^n nad \mathbb{R} , $n \in \mathbb{N}$

Wektory: $v_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $v_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Dodawanie: $v_1 + v_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

mnożenie przez liczbę rzeczywistą: $\alpha \cdot v_1 = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

3. Przestrzeń \mathbb{C}^n nad \mathbb{C}

Wektory: $v_1 = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $v_2 = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $z_k \in \mathbb{C}$, $w_k \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Dodawanie: $v_1 + v_2 = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \dots, z_n + w_n)$

mnożenie przez liczbę zespoloną: $\lambda \cdot v_1 = (\lambda z_1, \lambda z_2, \dots, \lambda z_n)$

3a. Przestrzeń \mathbb{C} nad \mathbb{C} – szczególny przypadek \mathbb{C}^n nad \mathbb{C} dla $n = 1$

Wektory to liczby zespolone: $v_1 = z$, $v_2 = w$, skalar $\lambda \in \mathbb{C}$

Dodawanie: $v_1 + v_2 = z + w$, mnożenie przez liczbę zespoloną: $\lambda \cdot v_1 = \lambda z$.

4. Przestrzeń \mathbb{C} nad \mathbb{R}

Wektory to liczby zespolone: $v_1 = z$, $v_2 = w$, skalar - liczba rzeczywista $\alpha \in \mathbb{R}$

Dodawanie: $v_1 + v_2 = z + w$, mnożenie przez liczbę rzeczywistą: $\alpha \cdot v_1 = \alpha z$.

5. $\mathbb{R}[x]$ nad \mathbb{R} – przestrzeń wielomianów o współczynnikach rzeczywistych

$$w_1(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad w_2(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{dodawanie: } (w_1 + w_2)(x) = w_1(x) + w_2(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \dots$$

$$\text{mnożenie przez liczbę rzeczywistą: } (\alpha \cdot w_1)(x) = \alpha \cdot w_1(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1x + \dots + \alpha a_nx^n$$

5a. $\mathbb{R}_n[x]$ nad \mathbb{R} – przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej n **6.** $\mathbb{C}[x]$ nad \mathbb{C} – przestrzeń wielomianów o współczynnikach zespolonych**6a.** $\mathbb{C}_n[x]$ nad \mathbb{C} – przestrzeń wielomianów zespolonych stopnia co najwyżej n

Element neutralny grupy $(V, +)$ nazywamy **wektorem zerowym** i oznaczamy $\mathbf{0}$.

Wektor przeciwny do $v \in V$ w grupie $(V, +)$ oznaczamy symbolem $-v$.

Różnica wektorów $v - u = v + (-u)$ dla $v, u \in V$.

Przykład 2.

- W przestrzeni \mathbb{R}^n nad \mathbb{R} wektor zerowy to $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$,
wektor przeciwny do $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ to $-v = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$
- W przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]$ nad \mathbb{R} wektor zerowy to wielomian stały równy 0,
wektor przeciwny do $w(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, to $(-w)(x) = -a_0 - a_1x - \dots - a_nx^n$.

Tw. 1. Niech V będzie przestrzenią liniową nad \mathbb{K} , $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

Wówczas

1. $\alpha v = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee v = \mathbf{0}$
2. $(-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha v)$

Podprzestrzenie

Jeśli $f : X \rightarrow Y$ i $A \subseteq X$, to funkcję $\varphi : A \rightarrow Y$ taką, że dla każdego $x \in A$ zachodzi $\varphi(x) = f(x)$ nazywamy obcięciem funkcji f do zbioru A .

Stosujemy oznaczenie: $\varphi = f|_A$.

Def. Podzbiór $W \subseteq V$ z odpowiednimi działaniami nazywamy **podprzestrzenią** przestrzeni $((V, +), \mathbb{K}, \cdot)$, jeśli trójka $((W, +|_W), \mathbb{K}, \cdot|_W)$ jest przestrzenią liniową.

Tw. 2. Niech $((V, +), \mathbb{K}, \cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

Trójka $((W, +), \mathbb{K}, \cdot)$, gdzie $W \subseteq V$ jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1^0 \quad \forall v, w \in W \quad v + w \in W \quad (\text{addytywność})$$

$$2^0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall v \in W \quad \alpha v \in W \quad (\text{jednorodność})$$

(lub równoważnie $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall v, w \in W \quad \alpha v + w \in W$).

Uwaga: Z warunku jednorodności dla $\alpha = 0$ wynika, że do każdej podprzestrzeni dowolnej przestrzeni należy wektor zerowy.

Własności podprzestrzeni

- Jeśli $\mathbf{0}$ – wektor zerowy przestrzeni liniowej V , to $\{\mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V . Taką podprzestrzeń nazywa się **przestrzenią zerową** lub **trywialną**.
- Każda przestrzeń liniowa jest swoją własną podprzestrzenią, którą nazywamy podprzestrzenią **niewłaściwą**.
- Jeśli U i W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V , to $U \cap W$ jest podprzestrzenią V .
- Jeśli U i W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V , to $U + W = \{u + w : u \in U \wedge w \in W\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V .

Przykład 3. Sprawdźmy, czy podane zbiory są podprzestrzeniami przestrzeni \mathbb{R}^2 .

a) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Zbiór W_1 możemy traktować jak prostą na płaszczyźnie.

Sprawdzamy warunki z twierdzenia 2.

Weźmy dowolne dwa wektory ze zbioru W_1 : $w_1 = (x_1, 0)$, $w_2 = (x_2, 0)$ i liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$w_1 + w_2 = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in W_1, \quad \text{bo spełnia warunek } y = 0$$

$$\text{także } \alpha \cdot w_1 = \alpha \cdot (x_1, 0) = (\alpha x_1, 0) \in W_1, \quad \text{bo spełnia warunek } y = 0.$$

Widzimy więc, że zarówno suma dowolnych wektorów ze zbioru W_1 jak i wielokrotność wektora ze zbioru W_1 należą do zbioru W_1 , więc W_1 jest podprzestrzenią przestrzeni \mathbb{R}^2 .

b) $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Ten zbiór też jest prostą na płaszczyźnie.

Weźmy dowolne dwa wektory ze zbioru W_2 : $w_1 = (x_1, y_1)$, $w_2 = (x_2, y_2)$ i liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zachodzą równości: $x_1 + 2y_1 = 0$ oraz $x_2 + 2y_2 = 0$ charakteryzujące wektory zbioru W_2 .

Po dodaniu równości stronami dostaniemy: $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 0$,

więc odpowiednia równość będzie też spełniona dla współrzędnych sumy tych wektorów, czyli $w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W_2$.

Jeśli wektor w_1 pomnożymy przez liczbę α , to dostaniemy wektor $\alpha \cdot w_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1)$, który również należy do W_2 , bo jeśli $x_1 + 2y_1 = 0 \Rightarrow \alpha(x_1 + 2y_1) = 0$.

Zbiór W_2 jest podprzestrzenią przestrzeni \mathbb{R}^2 .

c) $W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Weźmy wektor ze zbioru W_3 np. $w = (1, 1)$ oraz liczbę np. $\alpha = 2$.

Po przemnożeniu dostaniemy $\alpha \cdot w = 2 \cdot (1, 1) = (2, 2) \notin W_3$.

Nie jest spełniony warunek z tw. 2, więc zbiór W_3 nie jest podprzestrzenią przestrzeni \mathbb{R}^2 .

Można też zauważyć, że wektor zerowy $(0, 0)$ nie należy do zbioru W_3 , więc nie jest to podprzestrzeń.

Przykład 4. Sprawdźmy, czy zbiór $W = \{w \in \mathbb{R}[x] : w(2) = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]$.

Weźmy dowolne dwa wielomiany $w_1, w_2 \in W$ oraz liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sprawdźmy, czy $w_1 + w_2 \in W$ i czy $\alpha w_1 \in W$.

$(w_1 + w_2)(2) = w_1(2) + w_2(2) = 0 + 0 = 0$, więc warunek dla sumy wektorów jest spełniony.

$(\alpha w_1)(2) = \alpha w_1(2) = \alpha \cdot 0 = 0$, więc warunek dla wielokrotności wektora też jest spełniony.

Zbiór W jest więc podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}[x]$.

Przykład 5.

Sprawdźmy, czy podane zbiory są podprzestrzeniami przestrzeni \mathbb{R}^4 .

Niech $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : z = 0 \wedge t = 0\} = \{(x, y, 0, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

Jest to podprzestrzeń przestrzeni \mathbb{R}^4 .

Niech $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \wedge y = 0\} = \{(0, 0, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

To też jest to podprzestrzeń przestrzeni \mathbb{R}^4 .

a) Sprawdźmy, czy $W_1 \cap W_2$ jest podprzestrzenią \mathbb{R}^4 .

$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z, t) : x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \wedge t = 0\} = \{(0, 0, 0, 0)\} = \{\mathbf{0}\}$

Przecięcie podanych przestrzeni jest podprzestrzenią zerową.

b) Sprawdźmy, czy $W_1 \cup W_2$ jest podprzestrzenią \mathbb{R}^4 .

$$W_1 \cup W_2 = \{(x, y, z, t) : (x = 0 \wedge y = 0) \vee (z = 0 \wedge t = 0)\}$$

Weźmy dwa wektory ze zbioru $W_1 \cup W_2$: $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$.

Ich suma $v_1 + v_2 = (1, 1, 1, 1) \notin W$, więc $W_1 \cup W_2$ nie jest podprzestrzenią \mathbb{R}^4 .

c) Sprawdźmy, czy $W_1 + W_2$ jest podprzestrzenią \mathbb{R}^4 .

$$W_1 + W_2 = \{(x, y, 0, 0) + (0, 0, z, t) : x, y, z, t \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\} = \mathbb{R}^4$$

Suma algebraiczna przestrzeni W_1 i W_2 jest przestrzenią \mathbb{R}^4 jest więc jej niewłaściwą podprzestrzenią.

Interpretacja geometryczna podprzestrzeni

- Podprzestrzenie przestrzeni \mathbb{R}^2 to: podprzestrzeń zerowa, cała przestrzeń \mathbb{R}^2 oraz proste przechodzące przez punkt $(0, 0)$.
- Podprzestrzenie przestrzeni \mathbb{R}^3 to: podprzestrzeń zerowa, cała przestrzeń \mathbb{R}^3 oraz proste przechodzące przez punkt $(0, 0, 0)$, a także płaszczyzny do których należy punkt $(0, 0, 0)$.

Kombinacje liniowe i układy wektorów

Def. Niech V - przestrzeń liniowa nad ciałem \mathbb{K} , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$, $n \in \mathbb{N}$. Wektor $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ nazywamy **kombinacją liniową** wektorów v_1, v_2, \dots, v_n o współczynnikach $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów v_1, v_2, \dots, v_n z przestrzeni V nad ciałem \mathbb{K} oznaczamy $Lin\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,

tzn. $Lin\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$.

Przyjmujemy dodatkowo, że $Lin\{\emptyset\} = \{\mathbf{0}\}$.

Uwaga. Dla dowolnych wektorów $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ $Lin\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V . Przestrzeń $Lin\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ nazywamy **przestrzenią rozpiętą przez wektory** v_1, v_2, \dots, v_n lub **przestrzenią generowaną** przez te wektory.

Przykład 6. Przykłady w przestrzeni \mathbb{R}^3 .

- Przestrzeń generowana przez dwa niezerowe wektory może być płaszczyzną lub prostą.
 $Lin\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ - płaszczyzna $z = 0$;
 $Lin\{(1, 0, 0), (2, 0, 0)\}$ - prosta opisana układem równań: $y = 0, z = 0$;

- Przestrzeń generowana przez trzy niezerowe wektory może być całą przestrzenią \mathbb{R}^3 lub płaszczyzną, lub prostą.
 $Lin\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ - cała przestrzeń \mathbb{R}^3 ;
 $Lin\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0)\}$ - płaszczyzna $z = 0$;
 $Lin\{(1, 1, 1), (-1, -1, -1), (2, 2, 2)\}$ - prosta opisana układem równań: $z = x, y = x$.

Def. Niech v_1, v_2, \dots, v_n - wektory z przestrzeni V nad ciałem \mathbb{K} .

Ciąg (v_1, v_2, \dots, v_n) nazywamy **układem wektorów** w przestrzeni V nad ciałem \mathbb{K} .

Podukładem układu (v_1, v_2, \dots, v_n) nazywamy układ $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$,

gdzie $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Dodatkowo wprowadza się pojęcie układu pustego, ozn. \emptyset .

Def. Niech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Układ wektorów (v_1, v_2, \dots, v_n) w przestrzeni liniowej V nad \mathbb{K} nazywamy **liniowo niezależnym**, jeśli zachodzi implikacja:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

W przeciwnym wypadku układ (v_1, v_2, \dots, v_n) nazywamy **liniowo zależnym**.

Przyjmujemy, że układ pusty jest liniowo niezależny.

Przykład 7.

Sprawdzimy, czy układ wektorów $(v_1, v_2, v_3) = ((0, 1, -2), (1, 2, -1), (1, 0, 3))$ przestrzeni \mathbb{R}^3 jest liniowo niezależny.

Rozwiązujemy równanie $\alpha(0, 1, -2) + \beta(1, 2, -1) + \gamma(1, 0, 3) = (0, 0, 0)$

równoważne układowi równań:

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ -2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\beta \\ \alpha = -2\beta \\ 4\beta - \beta - 3\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\beta \\ \alpha = -2\beta \\ \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Układ równań posiada nieskończenie wiele rozwiązań, nie tylko rozwiązanie zerowe, więc badany układ wektorów jest liniowo zależny.

Jednym z rozwiązań jest np. $\beta = 1, \alpha = -2, \gamma = -1$, co oznacza, że $-2v_1 + v_2 - v_3 = \mathbf{0}$, a stąd dostajemy $v_2 = 2v_1 + v_3$, czyli wektor v_2 jest liniową kombinacją wektorów v_1 i v_3 .

Stw. Układ wektorów jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z wektorów układu można wyrazić w postaci kombinacji liniowej pozostałych.

Uwaga: Sytuacje kiedy łatwo można stwierdzić, czy układ wektorów jest liniowo zależny czy liniowo niezależny:

1. Jeśli wektor zerowy jest jednym z wektorów układu, to taki układ jest liniowo zależny;

2. Układ dwóch niezerowych wektorów jest liniowo zależny \Leftrightarrow jeden z wektorów jest wielokrotnością drugiego.
3. Układ składający się z jednego wektora jest liniowo zależny \Leftrightarrow jest to wektor zerowy.
4. Każdy podukład układu liniowo niezależnego jest liniowo niezależny.

Przykład 8. W przestrzeni \mathbb{R}^2

- a) układ $((1, 2))$ jest liniowo niezależny;
- b) układ $((0, 0))$ jest liniowo zależny;
- c) układ $((1, 2), (0, 0))$ jest liniowo zależny;
- d) układ $((1, 2), (3, 6))$ jest liniowo zależny;
- e) układ $((1, 2), (1, 1))$ jest liniowo niezależny;
- e) układ $((1, 2), (0, 1), (3, 1))$ jest liniowo zależny, bo $(3, 1) = 3 \cdot (1, 2) - 5 \cdot (0, 1)$;

Bazy przestrzeni liniowych

Def. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem \mathbb{K} .

Układ (v_1, \dots, v_n) wektorów z przestrzeni V nazywamy **bazą** przestrzeni V , jeśli

1° układ (v_1, \dots, v_n) jest liniowo niezależny,

2° $\text{Lin}\{v_1, \dots, v_n\} = V$ (układ (v_1, \dots, v_n) rozpiną przestrzeń V).

Warunek 2° jest równoważny warunkowi: $\forall w \in V \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \ w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$,

tzn. każdy wektor z przestrzeni V można wyrazić w postaci kombinacji liniowej wektorów v_1, \dots, v_n . Z warunku 1° wynika, że przedstawienie to jest jednoznaczne.

Skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nazywamy **współrzędnymi wektora** w w bazie (v_1, \dots, v_n) .

Przyjmujemy, że bazą przestrzeni zerowej jest układ pusty.

Przykład 9.

Sprawdźmy, czy układ wektorów $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3) = ((0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, -3))$

jest bazą przestrzeni \mathbb{R}^3 .

1. Sprawdzamy liniową niezależność układu.

Warunek $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \mathbf{0}$ jest równoważny układowi równań:

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Układ równań posiada jedynie rozwiązanie zerowe, więc badany układ wektorów jest liniowo niezależny.

2. Sprawdzamy, czy każdy wektor przestrzeni \mathbb{R}^3 można przedstawić jako liniową kombinację wektorów v_1, v_2, v_3 . Czy dla dowolnego wektora (x, y, z) można znaleźć liczby a, b, c takie, że $(x, y, z) = av_1 + bv_2 + cv_3$?

Równość powyższą zapiszemy jako układ równań:

$$\begin{cases} b = x \\ a + c = y \\ b - 3c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = x \\ c = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}z \\ a = y - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z \end{cases}$$

Okazuje się, że dla dowolnego wektora (x, y, z) można dobrać współczynniki a, b, c , więc układ $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ jest bazą przestrzeni \mathbb{R}^3 .

Każdy wektor przestrzeni \mathbb{R}^3 możemy wyrazić w bazie \mathcal{A} podając jego współrzędne.

Na przykład wektor $(6, 1, -3)$ ma w tej bazie współrzędne: $(-2, 6, 3)_{\mathcal{A}}$,

bo $(-2, 6, 3)_{\mathcal{A}} = -2v_1 + 6v_2 + 3v_3 = (6, 1, -3)$.

Tw. 3. Jeżeli układy (v_1, \dots, v_n) oraz (w_1, \dots, w_m) są bazami przestrzeni V , to $n = m$.

W przestrzeni liniowej można wybrać jej bazę na wiele sposobów, ale każda baza składać się będzie z takiej samej liczby wektorów.

Def. Przestrzeń wektorową mającą (skończoną) bazę nazywamy **skończenie wymiarową**.

Jeżeli V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową, to liczbę elementów bazy przestrzeni V nazywamy **wymiarem przestrzeni V** i oznaczamy symbolem $\dim V$.

Jeżeli żaden skończony układ niezerowej przestrzeni V nie rozpina całej przestrzeni V , to mówimy, że V jest przestrzenią **nieskończenie wymiarową**.

Przykład 10.

- Bazą przestrzeni \mathbb{R}^3 jest na przykład $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.
Każdy układ liniowo niezależny wektorów przestrzeni \mathbb{R}^3 może się składać co najwyżej z trzech wektorów.
- Bazą przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ jest na przykład $(x^2, x, 1)$, $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$.
- Przestrzeń wielomianów $\mathbb{R}[x]$ nie posiada skończonej bazy.

Tw. 4. Niech V będzie niezerową przestrzenią liniową.

Następujące warunki są równoważne:

- (1) Układ (v_1, \dots, v_n) jest bazą przestrzeni V .
- (2) Układ (v_1, \dots, v_n) jest liniowo niezależny i $\dim V = n$.
- (3) $\text{Lin}\{v_1, \dots, v_n\} = V$ i $\dim V = n$.
- (4) Układ (v_1, \dots, v_n) jest maksymalnym liniowo niezależnym układem w przestrzeni V .

Niech 1 oznacza jedynkę ciała \mathbb{K} , 0 - zero ciała \mathbb{K} .

Układ $((1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1))$ jest bazą przestrzeni \mathbb{K}^n nad \mathbb{K} .

Bazę tę oznaczamy symbolem \mathcal{E}_n i nazywamy **bazą kanoniczną (standardową)** przestrzeni \mathbb{K}^n nad \mathbb{K} . Wektory z tej bazy nazywamy wektorami **jednostkowymi** i oznaczamy e_1, e_2, \dots, e_n .

Przestrzeń wielomianów $\mathbb{K}_n[t]$ nad \mathbb{K} ma wymiar $n + 1$. Baza kanoniczna (standardowa) tej przestrzeni to układ $(t^n, t^{n-1}, \dots, t, 1)$.

Przestrzeń \mathbb{C} nad \mathbb{C} jest jednowymiarowa. Baza tej przestrzeni to np. $\mathcal{B} = (1)$.

Przestrzeń \mathbb{C} nad \mathbb{R} jest dwuwymiarowa. Baza tej przestrzeni to np. $\mathcal{B} = (1, j)$.

Kolumny i wiersze macierzy jako wektory

Uwaga. Kolumny macierzy $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ możemy interpretować jako wektory z przestrzeni \mathbb{K}^m , a wiersze jako wektory z przestrzeni \mathbb{K}^n .

Niech A_j oznacza j -tą kolumnę, zaś A^i oznacza i -ty wiersz macierzy A .

Wtedy rząd macierzy A , $r(A) = \dim \text{Lin}\{A_1, \dots, A_n\} = \dim \text{Lin}\{A^1, \dots, A^m\}$.

Rząd macierzy jest równy maksymalnej liczbie liniowo niezależnych kolumn (wierszy) macierzy.

Macierz układu wektorów, macierz zmiany bazy

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową o bazie $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$.

Dowolny wektor $w \in V$ możemy jednoznacznie przedstawić w postaci: $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$.

Ozn. $M_{\mathcal{B}}(w) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ - macierz współrzędnych wektora w w bazie \mathcal{B} .

Symbolem $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ będziemy oznaczać macierz współrzędnych wektorów układu \mathcal{A} w bazie \mathcal{B} . (W kolumnach macierzy zapisujemy współrzędne kolejnych wektorów układu \mathcal{A} .)

Przykład 11.

W przestrzeni \mathbb{R}^3 bazą kanoniczną jest $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

Macierzą wektora $v = (x, y, z)$ w bazie \mathcal{E}_3 jest $M_{\mathcal{E}_3}(v) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Tw. 5. Niech $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni V .

Dla dowolnego układu $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_m)$ wektorów z przestrzeni V zachodzi równość $\dim \text{Lin}\{u_1, \dots, u_m\} = r(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}))$.

Przykład 12.

Określmy wymiar przestrzeni $V = \text{Lin}\{(2, 0, 0, -2), (-3, 0, 0, 3), (0, 1, 0, 2), (0, 2, 0, 4)\}$.

Przyjmijmy oznaczenia wektorów:

$$u_1 = (2, 0, 0, -2), \quad u_2 = (-3, 0, 0, 3), \quad u_3 = (0, 1, 0, 2), \quad u_4 = (0, 2, 0, 4)$$

oraz układu $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.

Zgodnie z twierdzeniem 5 wymiar przestrzeni V jest równy rzędowi macierzy $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$, gdzie \mathcal{B} jest dowolną bazą przestrzeni \mathbb{R}^4 .

Wektory u_1, u_2, u_3, u_4 mamy wyrażone w bazie kanonicznej przestrzeni \mathbb{R}^4 , możemy więc zapisać

$$\text{macierz } M_{\mathcal{E}_4}(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\dim V = r(M_{\mathcal{E}_4}(\mathcal{U})) = r \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 2.$$

Tw. 6. Niech $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ będzie bazą przestrzeni V .

Następujące warunki są równoważne:

- (1) Układ $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_n)$ wektorów z V jest bazą przestrzeni V ,
- (2) $r(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})) = n$,
- (3) $\det M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \neq 0$.

Uwaga: W punkcie (3) twierdzenia 6. otrzymujemy proste kryterium pozwalające sprawdzić, czy układ wektorów jest bazą przestrzeni - wystarczy sprawdzić, czy wyznacznik macierzy tego układu jest niezerowy.

Przykład 13:

Sprawdzimy, czy układ wektorów $\mathcal{A} = (x^2 - 2, x + 1, x)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.

Zapiszmy macierz tego układu w bazie kanonicznej $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$.

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Wyznacznik tej macierzy jest równy } -1, \text{ nie jest zerowy,} \\ \text{więc układ } \mathcal{A} \text{ jest bazą przestrzeni } \mathbb{R}_2[x]. \end{array}$$

Def. Jeżeli \mathcal{A} i \mathcal{B} są bazami przestrzeni V , to macierz $M_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ nazywamy **macierzą zmiany bazy** (lub **macierzą przejścia od bazy \mathcal{A} do bazy \mathcal{B}**).

Stw. 1. Jeżeli \mathcal{A} i \mathcal{B} są bazami przestrzeni V , to $M_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = (M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}))^{-1}$.

Stw. 2. Jeżeli \mathcal{A} i \mathcal{B} są bazami przestrzeni V , $w \in V$, to $M_{\mathcal{B}}(w) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \cdot M_{\mathcal{A}}(w)$.

Przykład 14.

W przestrzeni \mathbb{R}^2 mamy bazę kanoniczną $\mathcal{E}_2 = (e_1, e_2) = ((1, 0), (0, 1))$ oraz np. bazę $\mathcal{B} = (v_1, v_2) = ((1, 1), (-1, 1))$.

Macierz zmiany bazy od \mathcal{E}_2 do \mathcal{B} to $B = M_{\mathcal{E}_2}(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

W kolumnach tej macierzy są zapisane wektory v_1, v_2 bazy \mathcal{B} wyrażone w „zwykłych” współrzędnych (w bazie kanonicznej).

Macierz zmiany bazy od \mathcal{B} do \mathcal{E}_2 to $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}_2) = B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

W kolumnach tej macierzy zapisane są wektory e_1, e_2 z bazy \mathcal{E}_2 wyrażone w bazie \mathcal{B} .

Z pierwszej kolumny odczytujemy: $e_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$,

z drugiej kolumny odczytujemy: $e_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$.

Jeśli chcemy wiedzieć, jak wyraża się jakiś wektor w bazie \mathcal{B} , możemy skorzystać ze stw. 2.

Na przykład wyrazimy wektor $w = (5, 1)$ w bazie \mathcal{B} .

Mamy $M_{\mathcal{E}_2}(w) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, stąd $M_{\mathcal{B}}(w) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}_2) \cdot M_{\mathcal{E}_2}(w) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$,

więc $w = (3, -2)_{\mathcal{B}} = 3v_1 - 2v_2$ (współrzędne w bazie \mathcal{B}).