Wielomiany

Def. **Wielomianem stopnia** $n \in \mathbb{N}_0$ o współczynnikach z ciała liczbowego $\mathbb{K}$ nazywamy funkcję $w : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ określoną wzorem

$$w(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n, \quad \text{gdzie } a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K},\ a_n \neq 0.$$

Liczby $a_0, a_1, ..., a_n$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu w.
Funkcję $w(t) \equiv 0$ nazywamy **wielomianem zerowym**.
Przyjmujemy, że stopień wielomianu zerowego jest równy $-\infty$
Wielomiany stopnia mniejszego niż 1 nazywamy **wielomianami stałymi**.

Wielomiany są równe, gdy mają takie same współczynniki.

Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$ oznaczamy $\mathbb{K}[t]$.
Stopień wielomianu w oznaczamy $deg(w)$ lub $st(w)$.
W zbiorze wielomianów definiujemy działanie dodawania i mnożenia.

Def. **Sumą** wielomianów $w_1, w_2 \in \mathbb{K}[t]$ nazywamy wielomian $w_1 + w_2 \in \mathbb{K}[t]$, taki że $(w_1 + w_2)(t) = w_1(t) + w_2(t)$ dla każdego $t \in \mathbb{K}$.

Def. **Iloczynem** wielomianów $w_1, w_2 \in \mathbb{K}[t]$ nazywamy wielomian $w_1 \cdot w_2 \in \mathbb{K}[t]$, taki że $(w_1 \cdot w_2)(t) = w_1(t) \cdot w_2(t)$ dla każdego $t \in \mathbb{K}$.

Fakt: Dla dowolnych wielomianów $w_1, w_2 \in \mathbb{K}[t]$ zachodzi
$deg(w_1 \cdot w_2) = \deg w_1 + \deg w_2, \qquad deg(w_1 + w_2) \leqslant \max\{\deg w_1, \deg w_2\}$.

Def. Mówimy, że wielomian $w \in \mathbb{K}[t]$ jest **rozkładalny** nad ciałem $\mathbb{K}$, jeśli istnieją wielomiany $w_1, w_2 \in \mathbb{K}[t]$ o dodatnich stopniach, takie że $w = w_1 \cdot w_2$.
W przeciwnym wypadku wielomian $w \in \mathbb{K}[t]$ nazywamy **nierozkładalnym**.

Przykład 1. Rozstrzygnąć, które z podanych wielomianów są rozkładalne nad ciałem $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$.

wielomian	nad $\mathbb{C}$	nad $\mathbb{R}$	nad $\mathbb{Q}$	
$t^2 - 2 = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$	tak	tak	nie	ma wspólczynniki niewymierne
$t^2 + 4 = (t - 2j)(t + 2j)$	tak	nie	nie	delta < 0
$t - 3$	nie	nie	nie	
$t^3 + 7 = (t + \sqrt[3]{7})(t^2 - \sqrt[3]{7}t + \sqrt[3]{7^2})$	tak	tak	nie	ma 3 pierwiastki zespolone
$t^3 + 1 = (t + 1)(t^2 - t + 1)$	tak	tak	tak	ma 3 pierwiastki zespolone
$t^2 + j$	tak	nie	nie	ma 2 pierwiastki zespolone

W zbiorze wielomianów $\mathbb{K}[t]$ wykonalne jest **dzielenie z resztą**, tzn.
dla dowolnych wielomianów $w, p \in \mathbb{K}[t]$, gdzie p nie jest wielomianem zerowym,
istnieją jednoznacznie określone wielomiany $q, r \in \mathbb{K}[t]$, takie że dla każdego $t \in \mathbb{K}$
zachodzi równość
$w(t) = p(t) \cdot q(t) + r(t)$, gdzie r jest wielomianem niższego stopnia niż p.

Wielomian r nazywamy **resztą** z dzielenia wielomianu w przez wielomian p.
Mówimy, że wielomian w jest **podzielny** przez wielomian p, jeśli r jest wielomianem zerowym.

Przykład 2. Wykonać dzielenie z resztą $(2x^4 + x^2 + 3x) : (x^2 + 1)$.

$$\begin{array}{lll} (2x^4 & +x^2 & +3x) \quad : (x^2+1) = 2x^2 - 1 \quad \text{reszta } r(x) = 3x+1 \\ -2x^4 & -2x^2 & \\ \hline & -x^2 & +3x \\ & +x^2 & +1 \\ \hline & & \underline{\underline{3x+1}} \end{array}$$

Mamy więc $(2x^4 + x^2 + 3x) = (2x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) + 3x + 1$

$$w(x) \ = \ q(x) \ \cdot \ p(x) \ + \ r(x)$$

Tw. (o dzieleniu z resztą). Dla dowolnego wielomianu $w \in \mathbb{K}[t]$ i dowolnego $a \in \mathbb{K}$
reszta z dzielenia wielomianu w przez wielomian $(t - a)$ jest równa $w(a)$.

Przykład 3. Wyznaczyć resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = (x - 2)^{100} + (x - 3 + j)^{95}$
przez $p(x) = (x - 2 + j)$.

Biorąc $a = 2 - j$ w twierdzeniu wyżej otrzymujemy
$r = w(2 - j) = (2 - j - 2)^{100} + (2 - j - 3 + j)^{95} = (-j)^{100} + (-1)^{95} = 1 - 1 = 0$

Def. Liczbę $t_0 \in \mathbb{K}$ nazywamy **pierwiastkiem wielomianu** $w \in \mathbb{K}[t]$, jeśli $w(t_0) = 0$.

Tw. Bézout (wniosek z tw. o reszcie). Element $t_0 \in \mathbb{K}$ jest pierwiastkiem wielomianu $w \in \mathbb{K}[t]$
wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez wielomian $(t - t_0)$.

Def. Liczbę $t_0 \in \mathbb{K}$ nazywamy k-**krotnym pierwiastkiem wielomianu** $w \in \mathbb{K}[t]$ $(k \in \mathbb{N})$, jeśli
istnieje wielomian $q \in \mathbb{K}[t]$, taki że dla każdego $t \in \mathbb{K}$ zachodzi $w(t) = (t-t_0)^k \cdot q(t)$ i $q(t_0) \neq 0$.

Przykład 4. Dla wielomianu $w(z) = 2z(z + j)(z - 4)^3$ liczby 0 i $-j$ są pierwiastkami pojedynczymi, a liczba 4 jest pierwiastkiem potrójnym.

Tw. (**Zasadnicze twierdzenie algebry**)
Każdy wielomian $w \in \mathbb{C}[z]$ różny od wielomianu stałego ma pierwiastek $z_0 \in \mathbb{C}$.

Przykład 5. Wyznaczyć pierwiastki zespolone wielomianu $w(z) = z^4 + 4$.

Należy rozwiązać równanie $z^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -4$.

Rozwiązaniami są pierwiastki 4-tego stopnia z liczby -4.

Zbiór rozwiązań to $\{1 + j, -1 + j, -1 - j, 1 - j\}$.

Wniosek 1. Każdy wielomian $w \in \mathbb{C}[z]$ stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (uwzględniając pierwiastki wielokrotne).

Wniosek 2. Każdy wielomian $w \in \mathbb{C}[z]$ dodatniego stopnia można rozłożyć na czynniki liniowe (które ewentualnie mogą w rozkładzie wystąpić więcej niż raz).

Przykład 6. Wyznaczyć rozkład wielomianu $w(z) = z^4 + 4$ na czynniki nad ciałem $\mathbb{C}$.
Korzystając z przykładu 5. wnioskujemy, że
$z^4 + 4 = 1 \cdot (z - 1 - j)(z + 1 - j)(z + 1 + j)(z + 1 - j)$.

Uwaga: Pierwiastki wielomianu kwadratowego nad $\mathbb{C}$ znajdujemy analogicznie jak nad $\mathbb{R}$ z uwzględnieniem faktu, że $\sqrt{\Delta}$ jest zbiorem niepustym.
Zatem dla $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{C}$, pierwiastki wielomianu $az^2 + bz + c$ to liczby zespolone

$$\frac{-b + \delta}{2a}, \quad \text{gdzie} \quad \delta \in \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Przykład 7. Wyznaczyć pierwiastki zespolone wielomianu $w(z) = z^2 + 2z + 2$.

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 2 = -4 \qquad \sqrt{\Delta} = \{2j, -2j\}$$
$$z_1 = \frac{-2 + 2j}{2} = -1 + j$$
$$z_2 = \frac{-2 - 2j}{2} = -1 - j$$
$$\text{Zatem} \quad w(z) = z^2 + 2z + 2 = (z + 1 - j)(z + 1 + j)$$

Tw. Jeżeli wszystkie współczynniki wielomianu $w \in \mathbb{C}[z]$ są liczbami rzeczywistymi i liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu w, to $\overline{z}_0$ jest również pierwiastkiem wielomianu w.

Dowód:

Niech $w(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, gdzie $a_k \in \mathbb{R}$ i $w(z_0) = 0$
(bo z_0 jest pierwiastkiem wielomianu w).

Wtedy dostajemy $w(\overline{z_0}) = a_0 + a_1\overline{z_0} + \ldots + a_n\overline{z_0}^n = \overline{a_0} + \overline{a_1 z_0} + \ldots + \overline{a_n z_0}^n =$
$$= \overline{a_0 + a_1 z_0 + \ldots + a_n z_0^n} = \overline{w(z_0)} = \overline{0} = 0,$$
czyli z_0 też jest pierwiastkiem wielomianu w. ⊠

Uwaga: Jeśli z_0 jest nierzeczywistym pierwiastkiem wielomianu w, to mamy parę pierwiastków sprzężonych z_0 i $\overline{z_0}$, więc wielomian w dzieli się przez $(z - z_0) \cdot (z - \overline{z_0})$.

Uwaga: $(z - z_0) \cdot (z - \overline{z_0}) = z^2 - 2\mathrm{Re}\, z_0 \cdot z + |z_0|^2$
(jest to wielomian o współczynnikach rzeczywistych nierozkładalny nad $\mathbb{R}$, $\Delta < 0$)

Wniosek. Każdy wielomian $w \in \mathbb{R}[x]$ dodatniego stopnia można rozłożyć na iloczyn wielomianów pierwszego stopnia oraz nierozkładalnych wielomianów drugiego stopnia.

Przykład 8. Wyznaczyć rozkład wielomianu $x^4 + 4$ na czynniki nad ciałem $\mathbb{R}$.

Sposób 1. $x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ dla obu wielomianów, zatem oba wielomiany są nierozkładalne nad $\mathbb{R}$.

Sposób 2. Wykorzystujemy rozkład wielomianu nad $\mathbb{C}$ (przykład 6) i własności pierwiastków sprzężonych:

$(x - (1 + j))(x - (1 - j)) = x^2 - 2x + 2$

$(x - (-1 + j))(x - (-1 - j)) = x^2 + 2x + 2$

Stąd $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$.

Przykład 9. Wyznaczyć rozkład wielomianu $w(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4$ nad ciałami $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

$w(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4 = z^2(z - 1) + 4(z - 1) = (z^2 + 4)(z - 1)$

Rozkład nad $\mathbb{R}$: $w(z) = (z^2 + 4)(z - 1)$

Rozkład nad $\mathbb{C}$: $z^2 + 4 = (z + 2j)(z - 2j)$, bo $z \in \sqrt{-4} = \{2j, -2j\}$

stąd rozkład $w(z) = (z + 2j)(z - 2j)(z - 1)$.

Funkcje wymierne i ułamki proste

Def. **Funkcją wymierną** nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy funkcję postaci
$$\frac{f(t)}{g(t)}, \quad \text{gdzie } f, g \in \mathbb{K}[t] \ \text{ i } deg(g) > 0.$$

Funkcję wymierną nazywamy **właściwą**, jeśli $deg(f) < deg(g)$.
(stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika)

Uwaga. Każda funkcja wymierna jest sumą wielomianu oraz funkcji wymiernej właściwej.

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{p(t)\cdot g(t) + r(t)}{g(t)} = p(t) + \frac{r(t)}{g(t)}, \quad deg(r) < deg(g).$$

Przykład 10. Wyrazić funkcję wymierną $\dfrac{2x^4+x^2+3x}{x^2+1}$
jako sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

$$\frac{2x^4+x^2+3x}{x^2+1} = 2x^2 - 1 + \frac{3x+1}{x^2+1} \qquad \text{na podstawie dzielenia z resztą (przykład 2).}$$

Def. Funkcję wymierną nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy **ułamkiem prostym**, jeśli ma postać

$$\frac{f(t)}{(h(t))^k}, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{N},\ deg(f) < deg(h),\ \ h \text{ – wielomian nierozkładalny w } \mathbb{K}[t].$$

Def. **Zespolonym ułamkiem prostym** nazywamy zespoloną funkcję wymierną postaci:

$$\frac{A}{(z+a)^n}, \quad \text{gdzie } A, a \in \mathbb{C} \text{ oraz } n \in \mathbb{N}.$$

Def. **Rzeczywistym ułamkiem prostym pierwszego rodzaju** nazywamy funkcję wymierną postaci: $\dfrac{A}{(x+a)^n}$, gdzie $A, a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

Def. **Rzeczywistym ułamkiem prostym drugiego rodzaju** nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci: $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$,
gdzie $A, B, p, q \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, przy czym $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

Przykład 11. Czy funkcja wymierna jest ułamniem prostym

1. nad ciałem $\mathbb{R}$?
   (a) $\dfrac{2x}{x^2+1}$ tak, mianownik jest nierozkładalny i $deg(f) < deg(h)$
   (b) $\dfrac{2x}{x+1}$ nie, bo nie zachodzi $deg(f) < deg(h)$
   (c) $\dfrac{3x^2}{x^2+4}$ nie, bo nie zachodzi $deg(f) < deg(h)$
   (d) $\dfrac{2x}{x^2-1}$ nie, bo mianownik jest rozkładalny
   (e) $\dfrac{2}{x^2-1}$ nie, bo mianownik jest rozkładalny

(f) $\dfrac{5}{(x-1)^6}$ tak, bo $h(x) = x - 1$ – nierozkładalny i $deg(f) < deg(h)$

(g) $\dfrac{5x}{(x-1)^5}$ nie, bo $h(x) = x - 1$ i nie zachodzi $deg(f) < deg(h)$

(h) $\dfrac{3x}{(x^2+x+1)^3}$ tak, bo $h(x) = x^2 + x + 1$ – nierozkładalny i $deg(f) < deg(h)$

(i) $\dfrac{3x}{(x^4+2x^2+1)^2}$ tak, bo $(x^4 + 2x^2 + 1)^2 = (x^2 + 1)^4 = [h(x)]^4$ i $deg(f) < deg(h)$

(j) $\dfrac{5}{x^6+7}$ nie, bo $x^6 + 7$ rozkłada się na iloczyn różnych wielomianów kwadratowych

2. nad ciałem $\mathbb{C}$?

(a) $\dfrac{2x}{x+j}$ nie, bo nie zachodzi $deg(f) < deg(h)$

(b) $\dfrac{3}{x+j}$ tak, bo mianownik jest nierozkładalny i $deg(f) < deg(h)$

(c) $\dfrac{2j}{x^2+1}$ nie, bo mianownik jest rozkładalny

(d) $\dfrac{j}{x-1+j}$ tak, bo mianownik jest nierozkładalny i $deg(f) < deg(h)$

(e) $\dfrac{5+3j}{(x-2j-1)^6}$ tak, bo $h(x) = x - 2j - 1$ – nierozkładalny i $deg(f) < deg(h)$

(f) $\dfrac{x-j}{(x-1)^5}$ nie, bo $h(x) = x - 1$ i nie zachodzi $deg(f) < deg(h)$

(g) $\dfrac{3j}{(x^2+2jx-1)^3}$ tak, bo $(x^2 + 2jx - 1)^3 = (x + j)^6 = [h(x)]^6$ i $deg(f) < deg(h)$

Tw. Każda właściwa funkcja wymierna nad ciałem $\mathbb{K}$ rozkłada się w sposób jednoznaczny na sumę ułamków prostych nad ciałem $\mathbb{K}$.

Zespolona funkcja wymierna właściwa

$$\frac{P(z)}{c_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\dots(z-z_m)^{k_m}}$$

jest sumą $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ zespolonych ułamków prostych, przy czym czynnikowi $(z - z_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych postaci:

$$\frac{A_{i1}}{z-z_i} + \frac{A_{i2}}{(z-z_i)^2} + \ldots + \frac{A_{ik_i}}{(z-z_i)^{k_i}},$$

gdzie stałe $A_\square$ są liczbami zespolonymi.

Przykład 12.

Wyznaczyć rozkład na sumę ułamków prostych zespolonej funkcji wymiernej $\dfrac{z^2+j}{z^2(z+j)}$.

$\frac{z^2+j}{z^2(z+j)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+j}$ (proponowany rozkład)

$\frac{z^2+j}{z^2(z+j)} = \frac{Az(z+j)+B(z+j)+Cz^2}{z^2(z+j)}$

Dalej porównujemy liczniki (mają to być wielomiany identyczne)

$z^2 + j = Az(z+j) + B(z+j) + Cz^2$

Podstawiamy za z pierwiastki mianownika i porównujemy wartości

Dla $z := 0 \quad j = B \cdot j \quad \Rightarrow \quad B = 1$

Dla $z := -j \quad -1 + j = C \cdot (-1) \quad \Rightarrow \quad C = 1 - j$

W przypadku gdy mamy $z = 0$ pierwiastek podwójny, porównujemy pochodne wielomianów (uwaga: pochodne wielomianów zespolonych oblicza się tak samo jak rzeczywistych)

$2z = 2Az + Aj + B + 2Cz$

Dla $z := 0 \quad 0 = Aj + B$ i wiemy, że $B = 1$, stąd $0 = Aj + 1$, więc $A = \frac{-1}{j} = j$

Ostatecznie uzyskujemy rozkład $\frac{z^2+j}{z^2(z+j)} = \frac{j}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1-j}{z+j}$

Rzeczywista funkcja wymierna właściwa

$$\frac{P(x)}{a_n(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_s+q_s)^{l_s}}$$

jest sumą $k_1+\ldots+k_m$ rzeczywistych ułamków prostych I rodzaju oraz $l_1+\ldots+l_s$ rzeczywistych ułamków prostych II rodzaju, przy czym czynnikowi $(x-x_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych I rodzaju postaci:

$$\frac{A_{i1}}{x-x_i} + \frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{A_{ik_i}}{(x-x_i)^{k_i}},$$

a czynnikowi $(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych II rodzaju postaci:

$$\frac{B_{j1}x+C_{j1}}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{B_{j2}x+C_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \ldots + \frac{B_{jl_j}x+C_{jl_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}},$$

gdzie stałe $A_\square, B_\square, C_\square$ są liczbami rzeczywistymi.

Przykład 13.

Wyznaczyć rozkład na sumę ułamków prostych rzeczywistej funkcji wymiernej $\frac{5x^3+x^2+3x+1}{x^2(x^2+1)}$.

$\frac{5x^3+x^2+3x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ (proponowany rozkład)

$\frac{5x^3+x^2+3x+1}{x^2(x^2+1)} = \frac{Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)}$

Dalej porównujemy liczniki (mają to być wielomiany identyczne)

$5x^3 + x^2 + 3x + 1 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + Dx^2$

$5x^3 + x^2 + 3x + 1 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + Ax + B$

Porównujemy współczynniki wielomianów

$$\begin{cases} (x^3) & 5 = & A + C \\ (x^2) & 1 = & B + D \\ (x) & 3 = & A \\ \textit{wyraz wolny} & 1 = & B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = & 3 \\ B = & 1 \\ C = & 2 \\ D = & 0 \end{cases}$$

Ostatecznie uzyskujemy rozkład $\dfrac{5x^3 + x^2 + 3x + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

Przykład 14.

Wyznaczyć rozkład na sumę ułamków prostych nad $\mathbb{C}$ zespolonej funkcji wymiernej $\dfrac{5z^3 + z^2 + 3z + 1}{z^2(z^2 + 1)}$.

$\dfrac{5z^3 + z^2 + 3z + 1}{z^2(z^2 + 1)} = \dfrac{a}{z} + \dfrac{b}{z^2} + \dfrac{c}{z - j} + \dfrac{d}{z + j}$ (proponowany rozkład)

Wykorzystamy wyniki z przykładu 13.

$a = A = 3, \quad b = B = 1$ oraz $\dfrac{c}{z - j} + \dfrac{d}{z + j} = \dfrac{2z}{z^2 + 1}$

Wyznaczymy c i d z ostatniej równości

$\dfrac{c(z + j) + d(z - j)}{(z - j)(z + j)} = \dfrac{2z}{(z - j)(z + j)}$

Dalej porównujemy liczniki (mają to być wielomiany identyczne)

$c(z + j) + d(z - j) = 2z$

Podstawiamy za z pierwiastki mianownika i porównujemy wartości

Dla $z := j \quad c \cdot 2j = 2j \quad \Rightarrow \ c = 1$

Dla $z := -j \quad d \cdot (-2j) = -2j \quad \Rightarrow \ d = 1$

Ostatecznie uzyskujemy rozkład nad $\mathbb{C}$: $\dfrac{5z^3 + z^2 + 3z + 1}{z^2(z^2 + 1)} = \dfrac{3}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z - j} + \dfrac{1}{z + j}$.

Podsumowanie

Wyznaczanie rozkładu funkcji wymiernej na sumę ułamków prostych — metoda współczynników nieoznaczonych

1. Daną funkcję wymierną właściwą zapisujemy w postaci nieskracalnego ułamka z mianownikiem w postaci iloczynu potęg wielomianów nierozkładalnych.

2. Zapisujemy przewidywaną postać rozkładu na sumę ułamków prostych (liczniki zapisujemy w postaci nieoznaczonej - nieznane współczynniki).

3. Dodajemy ułamki proste, sprowadzając je do wspólnego mianownika.

4. Porównujemy liczniki zadanej funkcji wymiarnej oraz otrzymanej sumy ułamków prostych. Współczynniki przy tych samych potęgach mają być jednakowe. Rozwiązujemy układ n równań z n nieznanymi współczynnikami (n jest stopniem mianownika zadanej funkcji wymiernej)

Uwaga: W przypadku, gdy mianownik rozkładanej funkcji wymiernej ma jedynie pojedyncze pierwiastki, uzyskujemy rozkład:

$$\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_k}{x-x_k}$$

i wtedy

$f(x) = A_1(x-x_2)\cdots(x-x_k) + A_2(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_k) + \ldots + A_k(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}).$

Wstawiając do otrzymanej równości kolejne wartości x_i, wyznaczymy łatwo współczynniki $A_1, \ldots, A_k$.

Po co to wszystko?

Rozkład funkcji wymiernej na sumę ułamków prostych jest wykorzystywany między innymi przy obliczaniu całek funkcji wymiernych.

Znane są wzory na całki ułamków prostych.

W pierwszym kroku należy przedstawić funkcję wymierną w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej, co uzyskujemy przez dzielenie z resztą.

Następnie należy zapisać otrzymaną funkcję wymierną właściwą jako sumę ułamków prostych.

Uzyskujemy w ten sposób zapis funkcji wymiernej jako sumy wielomianu i pewnych ułamków prostych. Całki poszczególnych składników można łatwo obliczyć, korzystając ze znanych wzorów.