Splot (dwustronny) funkcji

Zał. Funkcje f_1, f_2 są bezwzględnie całkowalne w przedziale $(-\infty, \infty)$.

Def. 1. Splotem funkcji f_1 i f_2 nazywamy całkę

$$f_1(t) * f_2(t) \stackrel{def}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau.$$

Całka ta jest funkcją zmiennej t.

Działanie $*$ nazywamy **splataniem** lub **mnożeniem splotowym**. Splot zdefiniowany powyżej nazywamy też **splotem dwustronnym** ze względu na granice całkowania.

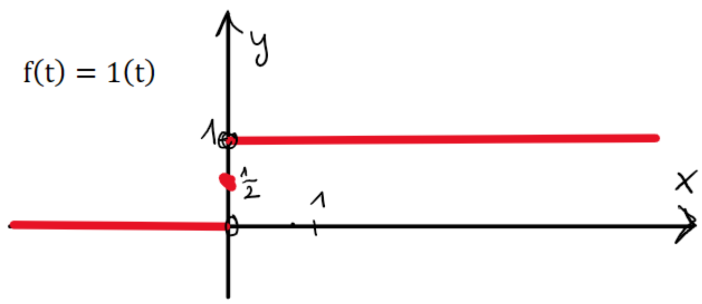
Własności splotu funkcji ciągłych

1. $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$ – przemienność splatania;
2. $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$ – łączność splatania;
3. $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$ – rozdzielność splatania względem dodawania.

Def. 2. Oryginał Laplace'a (oryginał) jest to funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że

1. $f(t) = 0$ dla $t < 0$;
2. w każdym przedziale $< 0, T >,\ T > 0$ funkcja f spełnia I i II warunek Dirichleta;
3. istnieją stałe $M > 0, \rho \geqslant 0$ takie, że $|f(t)| \leqslant M \cdot e^{\rho t}$ dla $t > 0$.

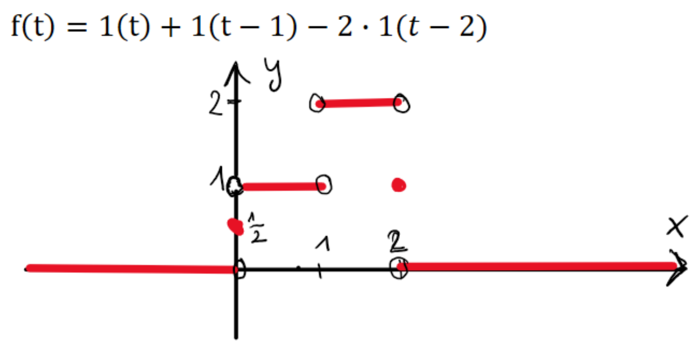
Def. 3. Funkcję $f(t) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla} \quad t = 0 \\ 1 & \text{dla} \quad t > 0 \end{cases}$ nazywamy **funkcją jednostkową** (funkcją Heaviside'a) i oznaczamy $\mathbf{1}(t)$.



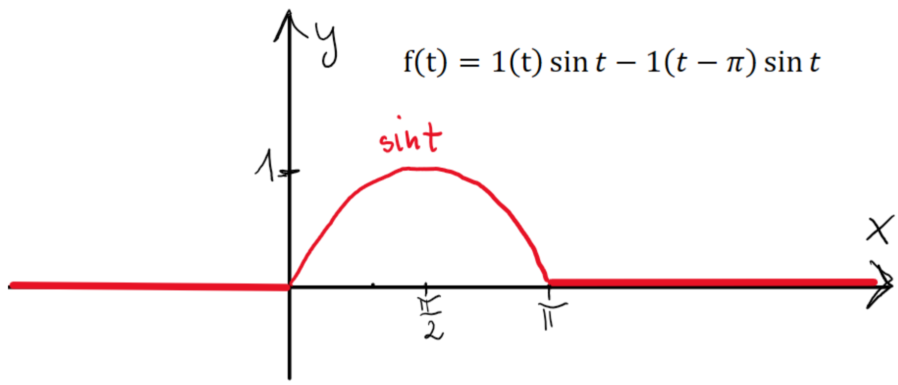
Wiele funkcji staje się oryginałami po przemnożeniu przez $\mathbf{1}(t)$.

Przykład 1.

a) $f(t) = 1(t) + 1(t-1) - 2 \cdot 1(t-2)$



b) $f(t) = 1(t) \cdot \sin t - 1(t-\pi) \cdot \sin t$



Uwaga. 1. Jeżeli $f_1(t) = f_2(t) = 0$ dla $t < 0$, to

$$f_1(t) * f_2(t) = \begin{cases} \int\limits_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau & \text{dla} \quad t > 0 \\ 0 & \text{dla} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

Przykład 2. Obliczanie splotu.

a) $\mathbf{1}(t) * \mathbf{1}(t) = \int\limits_0^t 1 \cdot 1 d\tau = \Big[\tau\Big]_0^t = t$ dla $t > 0$.

b) $\mathbf{1}(t) * (t \cdot \mathbf{1}(t)) = (t \cdot \mathbf{1}(t)) * \mathbf{1}(t) = \int\limits_0^t \tau \cdot 1 d\tau = \Big[\frac{\tau^2}{2}\Big]_0^t = \frac{t^2}{2}$ dla $t > 0$.

c) $(t \cdot \mathbf{1}(t)) * (t \cdot \mathbf{1}(t)) = \int\limits_0^t \tau \cdot (t-\tau) d\tau = \int\limits_0^t (t\tau - \tau^2) d\tau = \Big[t\frac{\tau^2}{2} - \frac{\tau^3}{3}\Big]_0^t = \frac{t^3}{2} - \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{6}$ dla $t > 0$.

d) $(e^{\alpha t}\cdot\mathbf{1}(t))*(e^{\beta t}\cdot\mathbf{1}(t))=\int\limits_0^t e^{\alpha\tau}\cdot e^{\beta(t-\tau)}d\tau=\int\limits_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau}\cdot e^{\beta t}d\tau=e^{\beta t}\int\limits_0^t e^{(\alpha-\beta)\tau}d\tau=$

$=e^{\beta t}\Big[\frac{e^{(\alpha-\beta)\tau}}{\alpha-\beta}\Big]_0^t=\frac{e^{\beta t}}{\alpha-\beta}\Big[e^{(\alpha-\beta)t}-e^0\Big]=\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{\alpha-\beta}$ dla $t>0,\ \alpha\neq\beta$.

e) $(e^{\alpha t}\cdot\mathbf{1}(t))*(e^{\alpha t}\cdot\mathbf{1}(t))=\int\limits_0^t e^{\alpha\tau}\cdot e^{\alpha(t-\tau)}d\tau=\int\limits_0^t e^{\alpha t}d\tau=e^{\alpha t}\int\limits_0^t d\tau=te^{\alpha t}$ dla $t>0$.

f) $\mathbf{1}(t)*(e^{\alpha t}\cdot\mathbf{1}(t))=\int\limits_0^t 1\cdot e^{\alpha(t-\tau)}d\tau=e^{\alpha t}\int\limits_0^t e^{-\alpha\tau}d\tau=e^{\alpha t}\Big[-\frac{e^{-\alpha\tau}}{\alpha}\Big]_0^t=$

$=e^{\alpha t}\Big[\frac{1}{\alpha}-\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\Big]=\frac{e^{-\alpha t}-1}{\alpha}$ dla $t>0$.

Przekształcenie Laplace'a

Def. 4. Przekształcenie Laplace'a jest to przekształcenie całkowe postaci

$$f\mapsto\mathcal{L}(f)=\overline{f},\ \text{gdzie }\overline{f}(s)\overset{def}{=}\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt,\ s\in\mathbb{C}.$$

Funkcję $\overline{f}\overset{ozn}{=}\mathcal{L}(f)$ nazywamy **transformatą Laplace'a** funkcji f ($\mathcal{L}$–**transformatą** funkcji f),

a całkę $\int\limits_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt$ – **całką Laplace'a** funkcji f.

Uwaga: Funkcja f jest funkcją zmiennej rzeczywistej $t\in\mathbb{R}$, a funkcja $\mathcal{L}(f)$ jest funkcją zmiennej zespolonej $s\in\mathbb{C}$.

Tw. 1. Jeżeli funkcja f jest oryginałem i $M>0,\rho\geqslant 0$ są takie, że $|f(t)|\leqslant M\cdot e^{\rho t}$ dla $t>0$, to całka Laplace'a funkcji f jest zbieżna dla każdej wartości zespolonej s takiej, że $\mathrm{Re}(s)>\rho$.

Przykład 3. Wyznaczymy transformaty podanych funkcji.

a) $f(t)=\mathbf{1}(t)$

$\mathcal{L}(\mathbf{1}(t))=\int\limits_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}dt=\lim\limits_{T\to+\infty}\Big[\frac{-e^{-st}}{s}\Big]_0^T=\lim\limits_{T\to+\infty}\Big(\frac{e^0-e^{-sT}}{s}\Big)=\frac{1-0}{s}=\frac{1}{s}$

Uwaga: Przy obliczeniach wykorzystano fakt: $\lim\limits_{T\to+\infty}e^{-sT}=0$, gdyż

$\lim\limits_{T\to+\infty}|e^{-sT}|=\lim\limits_{T\to+\infty}|e^{-(x+jy)T}|=\lim\limits_{T\to+\infty}|e^{-xT}\cdot e^{-jyT}|=\lim\limits_{T\to+\infty}|e^{-xT}|\cdot|e^{-jyT}|=\lim\limits_{T\to+\infty}e^{-xT}\cdot 1=0$

b) $f(t)=e^{-\alpha t},\ \alpha\in\mathbb{C}$

$\mathcal{L}(e^{-\alpha t})=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\cdot e^{-st}dt=\int\limits_0^{+\infty}e^{-(\alpha+s)t}dt=\lim\limits_{T\to+\infty}\Big[\frac{-e^{-(\alpha+s)t}}{\alpha+s}\Big]_0^T=$

$=\lim\limits_{T\to+\infty}\Big(\frac{e^0-e^{-(\alpha+s)T}}{\alpha+s}\Big)=\frac{1-0}{\alpha+s}=\frac{1}{\alpha+s}$

Własności przekształcenia Laplace'a

Zakładamy, że funkcje są oryginałami.

1. $\mathcal{L}(af_1 + bf_2) = a\mathcal{L}(f_1) + b\mathcal{L}(f_2),\ a, b \in \mathbb{R}$ – (**liniowość**)

Dowód:

$$\mathcal{L}(af_1+bf_2) = \int_0^{+\infty} (af_1(t)+bf_2(t))\cdot e^{-st}dt = a\int_0^{+\infty} f_1(t)\cdot e^{-st}dt + b\int_0^{+\infty} f_2(t)\cdot e^{-st}dt = a\mathcal{L}(f_1)+b\mathcal{L}(f_2).$$

Przykład 4. Zastosowanie liniowości $\mathcal{L}$-transformaty

$$\mathcal{L}(\sin\alpha t) = \mathcal{L}(\frac{1}{2j}(e^{j\alpha t} - e^{-j\alpha t})) = \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{j\alpha t}) - \frac{1}{2j}\mathcal{L}(e^{-j\alpha t}) = \frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{-j\alpha+s} - \frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{j\alpha+s} =$$

$$= \frac{1}{2j}\Big(\frac{j\alpha+s-(-j\alpha+s)}{\alpha^2+s^2}\Big) = \frac{2j\alpha}{2j(\alpha^2+s^2)} = \frac{\alpha}{\alpha^2+s^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos\alpha t) = \mathcal{L}(\frac{1}{2}(e^{j\alpha t} + e^{-j\alpha t})) = \frac{1}{2}[\mathcal{L}(e^{j\alpha t}) + \mathcal{L}(e^{-j\alpha t})] = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{-j\alpha+s} + \frac{1}{j\alpha+s}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{j\alpha+s+(-j\alpha+s)}{\alpha^2+s^2}\Big) = \frac{2s}{2(\alpha^2+s^2)} = \frac{s}{\alpha^2+s^2}$$

2. $\mathcal{L}(f(t-t_0)) = e^{-t_0 s}\cdot\mathcal{L}(f),\ t_0 > 0$ (**tw. o przesunięciu w argumencie oryginału**)

Dowód:

Zauważmy, że jeśli f jest oryginałem, to $f(t-t_0) = 0$ dla $t < t_0$. Stąd dostaniemy

$$\mathcal{L}(f(t-t_0)) = \int_0^{+\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt = \int_{t_0}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s(t_0+u)}du = \int_0^{+\infty} e^{-st_0}f(u)e^{-su}du =$$

$$= e^{-st_0}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}du = e^{-st_0}\mathcal{L}(f).$$

Zastosowano zamianę zmiennych: $u = t - t_0,\ du = dt$.

Przykład 5. Zastosowanie własności 2. Wyznaczymy $\mathcal{L}$-transformatę funkcji $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{dla } t \in [0,1] \\ 0 & \text{dla } t \notin [0,1] \end{cases}$

Zauważmy, że całka Laplace'a funkcji f będzie taka sama jak dla funkcji $\widetilde{f}(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)$ (różnica w dwóch punktach nie wpływa na wartość całki).

Zgodnie z własnością 2. mamy $\mathcal{L}(\mathbf{1}(t-1)) = e^{-1\cdot s}\cdot\mathcal{L}(\mathbf{1}(t)) = \frac{e^{-s}}{s}$, bo $\mathcal{L}(\mathbf{1}(t)) = \frac{1}{s}$.

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-1)) = \mathcal{L}(\mathbf{1}(t)) - \mathcal{L}(\mathbf{1}(t-1)) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1-e^{-s}}{s}.$$

3. $\mathcal{L}\Big(e^{-\alpha t}\cdot f(t)\Big)(s) = \mathcal{L}(f)(s+\alpha)$ (**tw. o przesunięciu w argumencie obrazu**)

Dowód: $\mathcal{L}\Big(e^{-\alpha t}\cdot f(t)\Big)(s)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}f(t)e^{-st}dt=\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-(s+\alpha)t}dt=\mathcal{L}(f)(s+\alpha).$

Przykład 6. Zastosowanie własności 3. Wyznaczymy $\mathcal{L}$-transformatę funkcji $f(t)=e^{-bt}\cdot\sin t.$

$\mathcal{L}(e^{-bt}\cdot\sin t)=\mathcal{L}(\sin t)\Big|_{s+b}=\dfrac{1}{1^2+s^2}\Big|_{s+b}=\dfrac{1}{1+(s+b)^2}$

4. Tw. o transformacie pochodnej. Jeżeli f i f' są oryginałami, to

$$\mathcal{L}(f'(t))=s\cdot\overline{f}(s)-f(0^+),\ \text{gdzie } f(0^+)\overset{ozn}{=}\lim_{t\to 0^+}f(t)$$

5. Uogólnienie na pochodne wyższych rzędów: Jeżeli funkcje $f,f',\ldots,f^{(n)}$ są oryginałami, to

$$\mathcal{L}\Big(f^{(n)}(t)\Big)=s^n\cdot\overline{f}(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}\cdot f^{(k)}(0^+)=$$
$$=s^n\cdot\overline{f}(s)-s^{n-1}\cdot f(0^+)-s^{n-2}\cdot f'(0^+)-\ldots-s\cdot f^{(n-2)}(0^+)-f^{(n-1)}(0^+),$$

gdzie $f^{(k)}(0^+)$ oznaczają odpowiednie granice prawostronne.

W szczególności mamy równości:

$$\mathcal{L}\Big(f''(t)\Big)=s^2\cdot\overline{f}(s)-s\cdot f(0^+)-f'(0^+),\quad (n=2)$$

$$\mathcal{L}\Big(f^{(3)}(t)\Big)=s^3\cdot\overline{f}(s)-s^2\cdot f(0^+)-s\cdot f'(0^+)-f''(0^+),\quad (n=3).$$

Uwaga: wzory na $\mathcal{L}$-transformaty pochodnych są wykorzystywane przy rozwiązywaniu równań różniczkowych. Różniczkowaniu w dziedzinie oryginałów odpowiadają działania arytmetyczne $(+,\cdot)$ w przestrzeni transformat.

6. Tw. o transformacie całki oryginału. Jeżeli f jest oryginałem, to

$$\mathcal{L}\Big(\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\Big)=\frac{\overline{f}(s)}{s}=\frac{\mathcal{L}(f)}{s}$$

7. Tw. o holomorficzności transformaty. Jeżeli funkcja f jest oryginałem i $M>0,\rho\geqslant 0$ są takie, że $|f(t)|\leqslant M\cdot e^{\rho t}$ dla $t>0$, to jej $\mathcal{L}$–transformata $\overline{f}$ jest funkcją holomorficzną w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}(s)>\rho$ i dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość

$$\overline{f}^{(n)}(s)=(-1)^n\cdot\mathcal{L}(t^nf(t))$$

Uwaga: Z powyższego twierdzenia dostajemy wzór

$$\mathcal{L}(t^nf(t))=(-1)^n\cdot\overline{f}^{(n)}(s).$$

Przykład 7. Zastosowanie twierdzenia o różniczkowaniu $\mathcal{L}$-transformaty.

a) $\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(t \cdot \mathbf{1}) = (-1)^1 \cdot \frac{d}{ds}\mathcal{L}(\mathbf{1}) = -1 \cdot \frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{s}\Big) = -1 \cdot \frac{-1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$

b) $\mathcal{L}(t^2) = \mathcal{L}(t \cdot t) = (-1)^1 \cdot \frac{d}{ds}\mathcal{L}(t) = -1 \cdot \frac{d}{ds}\Big(\frac{1}{s^2}\Big) = -1 \cdot \frac{-2}{s^3} = \frac{2}{s^3}$

c) $\mathcal{L}(t^3) = \mathcal{L}(t \cdot t^2) = (-1)^1 \cdot \frac{d}{ds}\mathcal{L}(t^2) = -1 \cdot \frac{d}{ds}\Big(\frac{2}{s^3}\Big) = -1 \cdot \frac{-2\cdot 3}{s^4} = \frac{6}{s^4}$

Można pokazać, że $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

d) $\mathcal{L}(t \cdot \sin \alpha t) = (-1)^1 \cdot \frac{d}{ds}\mathcal{L}(\sin \alpha t) = -1 \cdot \frac{d}{ds}\Big(\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\Big) = \frac{-(-2s\alpha)}{(s^2+\alpha^2)^2} = \frac{2s\alpha}{(s^2+\alpha^2)^2}$.

e) $\mathcal{L}(t^2 \cdot e^{-3t}) = (-1)^2 \cdot \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}(e^{-3t}) = \frac{d^2}{ds^2}\Big(\frac{1}{s+3}\Big) = \frac{d}{ds}\Big(\frac{-1}{(s+3)^2}\Big) = \frac{2}{(s+3)^3}$.

8. Jeżeli f jest oryginałem, a $\overline{f}$– jego transformatą Laplace'a, to istnieje przekształcenie odwrotne (ozn. $\mathcal{L}^{-1}$) takie, że $\mathcal{L}^{-1}\big(\overline{f}\big) = f$. To przekształcenie jest liniowe, tzn.

$$\mathcal{L}^{-1}\big(\alpha_1\overline{f_1} + \alpha_2\overline{f_2}\big) = \alpha_1\mathcal{L}^{-1}\big(\overline{f_1}\big) + \alpha_2\mathcal{L}^{-1}\big(\overline{f_2}\big)$$

dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

Uwaga: Jeśli f nie jest oryginałem (np. nie są spełnione warunki Dirichleta lub $f(t) \neq 0$ dla $t < 0$), to może istnieć $\mathcal{L}$-transformata funkcji f - $\mathcal{L}(f) = \overline{f}$, ale wtedy będzie $\mathcal{L}^{-1}\big(\overline{f}\big) \neq f$, bo $\mathcal{L}^{-1}\big(\overline{f}\big)$ musi być oryginałem.

Przykład 8. Obliczymy transformaty odwrotne podanych funkcji $F(s)$.

a) $F(s) = \frac{2}{s(s+2)}$

Funkcję $F(s)$ zapiszemy jako sumę ułamków prostych i skorzystamy ze znanych już wzorów oraz liniowości transformaty odwrotnej.

$F(s) = \frac{2}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$.

Wiemy, że $\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s}\Big) = \mathbf{1}(t)$, bo $\mathcal{L}(\mathbf{1}(t)) = \frac{1}{s}$,

zaś $\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s+2}\Big) = e^{-2t}\mathbf{1}(t)$, bo $\mathcal{L}(e^{-2t}\mathbf{1}(t)) = \frac{1}{s+2}$ (własność 3).

$\mathcal{L}^{-1}\big(F(s)\big) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\Big) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s}\Big) - \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s+2}\Big) = \mathbf{1}(t) - e^{-2t}\mathbf{1}(t) = (1-e^{-2t})\mathbf{1}(t)$.

b) $F(s) = \frac{e^{-3s}}{s(s+2)}$

Wykorzystamy obliczenia z punktu a) oraz własność 2. (tw. o przesunięciu w argumencie oryginału).

$F(s) = \frac{e^{-3s}}{s(s+2)} = e^{-3s} \cdot \frac{1}{2}\frac{2}{s(s+2)} = e^{-3s} \cdot \mathcal{L}\Big(\frac{1}{2}(1-e^{-2t})\mathbf{1}(t)\Big)$

Stosujemy własność 2. dla $t_0 = 3$

$F(s) = e^{-3s} \cdot \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(f(t-3))$, gdzie $f(t) = \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\mathbf{1}(t)$,

stąd $\mathcal{L}^{-1}\Big(F(s)\Big) = f(t-3) = \dfrac{1}{2}(1-e^{-2t})\mathbf{1}(t)\Big|_{t\mapsto t-3} = \dfrac{1}{2}(1-e^{-2(t-3)})\mathbf{1}(t-3)$.

c) $F(s) = \dfrac{1}{s^5}$

Wykorzystamy wzór z przykładu 7. $\mathcal{L}(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$.

Stąd $\dfrac{1}{s^k} = \dfrac{1}{(k-1)!}\mathcal{L}(t^{k-1}) = \mathcal{L}\Big(\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\Big)$,

więc $\mathcal{L}^{-1}\Big(F(s)\Big) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1}{s^5}\Big) = \dfrac{t^4}{4!} \cdot \mathbf{1}(t)$.

d) $F(s) = \dfrac{1}{(s+3)^5}$

Wykorzystamy wynik z punktu c) i własność 3. (tw. o przesunięciu w argumencie obrazu)

$\mathcal{L}\Big(e^{-\alpha t} \cdot f(t)\Big)(s) = \mathcal{L}(f)(s+\alpha)$ dla $\alpha = 3$.

$F(s) = \dfrac{1}{(s+3)^5} = \mathcal{L}(f)\Big|_{s+3} = \mathcal{L}\Big(e^{-3t} \cdot f(t)\Big)(s)$, gdzie $f(t) = \dfrac{t^4}{4!}\mathbf{1}(t)$.

Stąd $\mathcal{L}^{-1}\Big(F(s)\Big) = \mathcal{L}^{-1}\dfrac{1}{(s+3)^5} = \dfrac{t^4}{4!} \cdot e^{-3t} \cdot \mathbf{1}(t)$.

e) $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

Wykorzystamy liniowość transformaty odwrotnej i wcześniejsze wyniki.

$F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s^2} + \dfrac{Cs+D}{s^2+1} = \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2+1}$.

Wcześniej obliczone: $\mathcal{L}(t) = \dfrac{1}{s^2}$, $\mathcal{L}(\sin t) = \dfrac{1}{s^2+1}$.

Stąd $\mathcal{L}^{-1}\Big(F(s)\Big) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^2+1}\Big) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1}{s^2}\Big) - \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1}{s^2+1}\Big) = (t - \sin t)\mathbf{1}(t)$.

9. Jeżeli funkcje f_1, f_2 są oryginałami, to istnieje $\mathcal{L}$–transformata ich splotu i prawdziwy jest wzór

$$\mathcal{L}\Big[f_1(t) * f_2(t)\Big] = \mathcal{L}\Big[f_1(t)\Big] \cdot \mathcal{L}\Big[f_2(t)\Big]. \qquad \textbf{(tw. Borela)}$$

Twierdzenie Borela można wykorzystać do obliczania splotu funkcji lub obliczania transformaty odwrotnej iloczynu funkcji.

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\mathcal{L}\Big[f_1(t)\Big] \cdot \mathcal{L}\Big[f_2(t)\Big]\Big).$$

Przykład 9.

a) W przykładzie 8e) obliczono $\mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}\Big) = (t-\sin t)\mathbf{1}(t)$.

Mamy więc $\mathcal{L}\Big((t-\sin t)\Big) = \dfrac{1}{s^2}\cdot\dfrac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}(t)\cdot\mathcal{L}(\sin t) = \mathcal{L}(t*\sin t)$,

a stąd $t*\sin t = t-\sin t$.

b) Obliczymy transformatę odwrotną funkcji $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$

Na mocy tw. Borela możemy zapisać

$F(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)^2} = \dfrac{1}{s^2+1}\cdot\dfrac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}(\sin t)\cdot\mathcal{L}(\sin t) = \mathcal{L}(\sin t*\sin t)$,

a stąd $\mathcal{L}^{-1}\Big(F(s)\Big) = (\sin t*\sin t)\mathbf{1}(t)$

$$\sin t*\sin t = \int_0^t \sin\tau\cdot\sin(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{2}[\cos(t-2\tau)-\cos(t)]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t [\cos(2\tau-t)-\cos t]d\tau = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\sin(2\tau-t)-\tau\cos t\Big]_0^t =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}(\sin t-\sin(-t))-t\cos t\Big] = \frac{1}{2}[\sin t-t\cos t]$$

Ostatecznie $\mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\Big) = \dfrac{1}{2}[\sin t-t\cos t]\mathbf{1}(t)$

Rachunek operatorowy

Rachunek operatorowy to metoda rozwiązywania pewnych typów równań funkcyjnych (różniczkowych i całkowych) z wykorzystaniem własności przekształcenia Laplace'a.
Dzięki wykorzystaniu przekształcenia całkowego można uzyskać prostszą postać rozwiązywanych równań (postać algebraiczną) i mogą być one rozwiązywane prostszymi metodami. Metoda ta korzystna jest przy wyznaczaniu rozwiązań rownań różniczkowych zwyczajnych, zwłaszcza równań o stałych współczynnikach. Stosując metodę przekształcenia Laplace'a do rozwiązywania równania różniczkowego, w zasadzie wyznaczamy całkę szczególną, spełniającą zadane warunki początkowe.

Stosując metodę transformaty Laplace'a do rozwiazania równania funkcyjnego, zakładamy, że istnieje rozwiązanie $x(t)$, które jest oryginałem.

Metoda transformaty Laplace'a składa się z trzech etapów, mianowicie:

1. znalezienie transformat obu stron równania, z uwzględnieniem warunków początkowych;
2. uzyskanie rozwiązania $\overline{x}(s)$ otrzymanego równania algebraicznego, które jest transformatą oryginału $x(t)$;

3. uzyskanie rozwiązania pierwotnego równania jako transformaty odwrotnej: $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[\overline{x}(s)]$.

Uzyskane w taki sposób rozwiązanie $x(t)$ jest oryginałem, więc spełnia dane równanie dla $t \geqslant 0$.

Przykład 10. Rozwiążemy równanie $x'(t) + x(t) = \sin t$ z warunkiem początkowym $x(0^+) = 0$.

Zakładamy, że istnieje $\mathcal{L}(x(t)) = \overline{x}(s)$.

Wtedy mamy:

$\mathcal{L}(x'(t)) = s \cdot \overline{x}(s) - x(0^+) = s \cdot \overline{x}(s) - 0$

$\mathcal{L}(x'(t) + x(t)) = \mathcal{L}(\sin t)$

$s \cdot \overline{x}(s) + \overline{x}(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$

$\overline{x}(s)(s+1) = \dfrac{1}{s^2+1}$

$\overline{x}(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{Bs+C}{s^2+1}$

Rozwiązanie równania czyli funkcję $x(t)$ możemy otrzymać w postaci oryginału wyznaczając transformatę odwrotną funkcji $\overline{x}(s)$.

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(\overline{x}(s)) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{A}{s+1} + \dfrac{Bs}{s^2+1} + \dfrac{C}{s^2+1}\Big) =$

$= A \cdot \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1}{s+1}\Big) + B \cdot \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{s}{s^2+1}\Big) + C \cdot \mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1}{s^2+1}\Big) = (Ae^{-t} + B\cos t + C\sin t)\mathbf{1}(t)$

Współczynniki A, B, C wyznaczymy z równości

$\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{Bs+C}{s^2+1}$

Porównujemy wielomiany w licznikach po sprowadzeniu do wspólnego mianownika wyrażeń z prawej strony równania.

$1 \equiv A(s^2+1) + (Bs+C)(s+1)$

$0 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 1 = (A+B)s^2 + (B+C)s + A + C$

Rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases}$ i dostajemy $A = C = \dfrac{1}{2},\ B = -\dfrac{1}{2}$,

stąd ostatecznie rozwiąznie to $x(t) = \dfrac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t)\mathbf{1}(t)$.

Przykład 11.

Rozwiążemy równanie $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 1$ z warunkiem początkowym $y(0^+) = 1, y'(0^+) = 0$.

Zakładamy, że istnieje $\mathcal{L}(y(t)) = \overline{y}(s)$.

Wtedy mamy:

$\mathcal{L}(y'(t)) = s \cdot \overline{y}(s) - y(0^+) = s \cdot \overline{y}(s) - 1$

$\mathcal{L}\Big(y''(t)\Big) = s^2 \cdot \overline{y}(s) - s \cdot y(0^+) - y'(0^+) = s^2 \cdot \overline{y}(s) - s - 0$

$\mathcal{L}(1(t)) = \frac{1}{s}$.

Zapisujemy $\mathcal{L}$-transformatę równania.

$s^2 \cdot \overline{y}(s) - s - (s \cdot \overline{y}(s) - 1) - 2\overline{y}(s) = \frac{1}{s}$.

$\overline{y}(s)(s^2 - s - 2) - s + 1 = \frac{1}{s}$.

$\overline{y}(s)(s^2 - s - 2) = s - 1 + \frac{1}{s}$.

$\overline{y}(s)(s-2)(s+1) = \frac{s^2 - s + 1}{s}$.

$\overline{y}(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}$.

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\overline{y}(s)) = -\frac{1}{2}\mathbf{1}(t) + e^{-t}\mathbf{1}(t) + \frac{1}{2}e^{2t}\mathbf{1}(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} + 2e^{-t} - 1)\mathbf{1}(t)$.

Przykład 12.

Rozwiążemy równanie $y'(t) - y(t) + \int_0^t (t-\tau)y'(\tau)d\tau - \int_0^t y(\tau)d\tau = t$

z warunkiem początkowym $y(0^+) = -1$.

Zakładamy, że istnieje $\mathcal{L}(y(t)) = \overline{y}(s)$.

Wtedy mamy:

$\mathcal{L}(y'(t)) = s \cdot \overline{y}(s) - y(0^+) = s \cdot \overline{y}(s) + 1$

$\mathcal{L}(\int_0^t y(\tau)d\tau) = \frac{1}{s} \cdot \overline{y}(s)$

$\mathcal{L}\Big(\int_0^t (t-\tau)y'(\tau)d\tau\Big) = \mathcal{L}\Big(t * y'(t)\Big) = \mathcal{L}(t) \cdot \mathcal{L}(y'(t)) = \frac{1}{s^2} \cdot (s \cdot \overline{y}(s) + 1) = \frac{1}{s} \cdot \overline{y}(s) + \frac{1}{s^2}$

$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$

Zapisujemy $\mathcal{L}$-transformatę równania.

$s \cdot \overline{y}(s) + 1 - \overline{y}(s) + \frac{1}{s} \cdot \overline{y}(s) + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \cdot \overline{y}(s) = \frac{1}{s^2}$

$s \cdot \overline{y}(s) + 1 - \overline{y}(s) = 0$

$(s-1) \cdot \overline{y}(s) = -1$

$\overline{y}(s) = \frac{-1}{s-1}$

Rozwiązanie równania czyli funkcję $y(t)$ otrzymamy w postaci oryginału wyznaczając transformatę odwrotną funkcji $\overline{y}(s)$.

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\overline{y}(s)) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{-1}{s-1}) = -e^t\mathbf{1}(t)$.

Przykład 13.

Rozwiążemy równanie $y(t) = 1 - 2\int_0^t e^{2(t-\tau)}y(\tau)d\tau - \int_0^t y(\tau)d\tau.$

Zakładamy, że istnieje $\mathcal{L}(y(t)) = \overline{y}(s)$.

Wtedy mamy:

$\mathcal{L}(\int_0^t y(\tau)d\tau) = \frac{1}{s} \cdot \overline{y}(s)$

$\mathcal{L}\Big(\int_0^t e^{2(t-\tau)}y(\tau)d\tau\Big) = \mathcal{L}\Big(e^{2t} * y(t)\Big) = \mathcal{L}(e^{2t}) \cdot \mathcal{L}(y(t)) = \frac{1}{s-2} \cdot \overline{y}(s)$

$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$

Zapisujemy $\mathcal{L}$-transformatę równania.

$\overline{y}(s) = \frac{1}{s} - 2 \cdot \frac{1}{s-2} \cdot \overline{y}(s) - \frac{1}{s} \cdot \overline{y}(s)$

$\overline{y}(s) + 2 \cdot \frac{1}{s-2} \cdot \overline{y}(s) + \frac{1}{s} \cdot \overline{y}(s) = \frac{1}{s}$

$\overline{y}(s)(1 + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s}) = \frac{1}{s}$

$\overline{y}(s)(\frac{s^2+s-2}{s(s-2)}) = \frac{1}{s}$

$\overline{y}(s) = \frac{s-2}{s^2+s-2} = \frac{s-2}{(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-1}$

Rozwiązanie:

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\overline{y}(s)) = \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-1}\Big) = \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s+2}\Big) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{s-1}\Big) = \Big(\frac{4}{3}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{t}\Big)\mathbf{1}(t).$

Przykład 14. Rozwiążemy równanie $y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 1 - e^t$

z warunkiem początkowym $y(0^+) = 1, y''(0^+) = -2$.

Do wyznaczenia rozwiązania potrzebna będzie wartość $y'(0^+)$. Wyznaczymy ją z równania.

$y''(0^+) - 2y'(0^+) + 2y(0^+) = 1 - e^0$

$-2 - 2y'(0^+) + 2 \cdot 1 = 1 - 1 \implies y'(0^+) = 0$

Zakładamy, że istnieje $\mathcal{L}(y(t)) = \overline{y}(s)$.

Wtedy mamy:

$\mathcal{L}(y'(t)) = s \cdot \overline{y}(s) - y(0^+) = s \cdot \overline{y}(s) - 1$

$\mathcal{L}\Big(y''(t)\Big) = s^2 \cdot \overline{y}(s) - s \cdot y(0^+) - y'(0^+) = s^2 \cdot \overline{y}(s) - s - 0$

$\mathcal{L}(1 - e^t) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}.$

Zapisujemy $\mathcal{L}$-transformatę równania.

$s^2 \cdot \overline{y}(s) - s - 2(s \cdot \overline{y}(s) - 1) + 2\overline{y}(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}.$

$\overline{y}(s)(s^2 - 2s + 2) - s + 2 = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}.$

$\overline{y}(s)(s^2-2s+2)=s-2+\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s-1}=\dfrac{s^3-3s^2+2s-1}{s(s-1)}.$

$\overline{y}(s)=\dfrac{s^3-3s^2+2s-1}{s(s-1)(s^2-2s+2)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s-1}+\dfrac{Cs+D}{(s-1)^2+1}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s-1}+\dfrac{C(s-1)+C+D}{(s-1)^2+1}=$

$=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s-1}+\dfrac{C(s-1)}{(s-1)^2+1}+\dfrac{C+D}{(s-1)^2+1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(s-1)^2+1}$

Rozwiązanie:

$y(t)=\mathcal{L}^{-1}(\overline{y}(s))=\mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(s-1)^2+1}\Big)=$

$=\dfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1}{s}\Big)-\mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1}{s-1}\Big)+\dfrac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{s-1}{(s-1)^2+1}\Big)-\dfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big(\dfrac{1}{(s-1)^2+1}\Big)=$

$=\Big(\dfrac{1}{2}-e^t+\dfrac{3}{2}e^t\cos t-\dfrac{1}{2}e^t\sin t\Big)\mathbf{1}(t).$

Dzięki łatwemu przenoszeniu funkcji $x(t)$ z dziedziny zmiennej rzeczywistej w dziedzinę zmiennej zespolonej $\overline{x}(s)$ i odwrotnie transformata Laplace'a wykorzystywana jest miedzy innymi do analizy obwodów elektrycznych. Każdy z elementów obwodu ma swój odpowiednik w dziedzinie zmiennej zespolonej.