Całka funkcji zmiennej zespolonej

Zał. $\widehat{AB}$ – łuk zwykły skierowany; położony na płaszczyźnie zespolonej,

o parametryzacji $z(t) = x(t) + j\,y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, zgodnej z kierunkiem tego łuku;

$f(z)$ – ciągła funkcja zmiennej zespolonej, określona na łuku $\widehat{AB}$.

Dzielimy przedział $[\alpha, \beta]$ na n podprzedziałów punktami $t_k,\ k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

Tym punktom odpowiadają punkty łuku: $z_k = z(t_k)$. Na każdym otrzymanym k-tym segmencie łuku wybieramy dowolnie punkt ξ_k i tworzymy sumę całkową:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

Def. 1. Całką funkcji f wzdłuż łuku $\widehat{AB}$ (oznaczaną $\int\limits_{\widehat{AB}} f(z)dz$) nazywamy wspólną, właściwą granicę ciągów sum całkowych, niezależną od wyboru punktów ξ_k (jeśli taka istnieje).

Uwaga 1. Jeżeli $f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$, to $\int\limits_{\widehat{AB}} f(z)dz$ istnieje $\iff$ istnieją całki krzywoliniowe $\int\limits_{\widehat{AB}} udx - vdy$ oraz $\int\limits_{\widehat{AB}} vdx + udy$ i zachodzi równość

$$\int\limits_{\widehat{AB}} f(z)dz = \int\limits_{\widehat{AB}} udx - vdy + j \cdot \int\limits_{\widehat{AB}} vdx + udy$$

Dalej znając parametrzację łuku, skorzystamy z zamiany całki krzywoliniowej na całkę oznaczoną

$$\int\limits_{\widehat{AB}} udx - vdy + j \int\limits_{\widehat{AB}} vdx + udy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \Big(u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\Big)dt + j \int_{\alpha}^{\beta} \Big(v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)\Big)dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \Big[u(x(t), y(t)) + jv(x(t), y(t))\Big] \cdot (x'(t) + jy'(y))dt = \int_{\alpha}^{\beta} f\Big(z(t)\Big) \cdot z'(t)dt.$$

Tw. 1. (**O zamianie całki funkcji zmiennej zespolonej na całkę oznaczoną**)

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest ciągła na zwykłym łuku gładkim $\widehat{AB} : z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, skierowanym zgodnie ze wzrostem parametru, to

$$\int\limits_{\widehat{AB}} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f\Big(z(t)\Big) \cdot z'(t)dt.$$

Przykład 1. Obliczymy całki:

a) $\int\limits_{\widehat{AB}} z dz$, gdzie łuk $\widehat{AB}$ to ćwierć okręgu o równaniu $|z| = 1$ od $A = 1$ do $B = j$.

Parametryzacja łuku: $z(t) = e^{jt} = \cos t + j \sin t,\ t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ z'(t) = je^{jt} = -\sin t + j\cos t$

Wykorzystamy tw. 1.

$$\int\limits_{\widehat{AB}} z dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z(t) \cdot z'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{jt} \cdot je^{jt} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} je^{2jt} dt = \Big[\frac{j}{2j} e^{2jt}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}[e^{\pi j} - e^0] = -1$$

b) $\int\limits_{\widehat{AB}} |z| dz$, gdzie łuk $\widehat{AB}$ to lewa połowa okręgu o równaniu $|z| = 1$ od $A = j$ do $B = -j$.

Parametryzacja łuku:

$z(t) = e^{jt} = \cos t + j \sin t,\ |z(t)| = 1,\ t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi],\ z'(t) = je^{jt} = -\sin t + j \cos t$

Wykorzystamy tw. 1.

$$\int\limits_{\widehat{AB}} |z| dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} |z(t)| \cdot z'(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} 1 \cdot (-\sin t + j \cos t) dt = \Big[\cos t + j \sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = j[-1 - 1] = -2j$$

Własności całki

Jeżeli funkcje f i g są całkowalne wzdłuż łuku $\widehat{AB}$, to

1. $\int\limits_{\widehat{AB}} [f(z) + g(z)] dz = \int\limits_{\widehat{AB}} f(z) dz + \int\limits_{\widehat{AB}} g(z) dz;$
2. $\int\limits_{\widehat{AB}} \alpha \cdot f(z) dz = \alpha \cdot \int\limits_{\widehat{AB}} f(z) dz;$
3. $\int\limits_{\widehat{AB}} f(z) dz = -\int\limits_{\widehat{BA}} f(z) dz.$

Powyższe własności pozostają prawdziwe dla całek po krzywych zamkniętych.

Uwaga 2. Jeżeli C jest okręgiem $K(z_0; r)$ skierowanym dodatnio względem wnętrza, a n – dowolną liczbą naturalną, to

$$\oint\limits_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{gdy} \quad n = 1 \\ 0 & \text{gdy} \quad n > 1 \end{cases}$$

Obliczenia:

Parametryzacja: $z(t) = z_0 + r \cdot e^{jt},\ t \in [0, 2\pi],\ z'(t) = jre^{jt},\ z - z_0 = r \cdot e^{jt}$

$$\oint\limits_C \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \int_0^{2\pi} \frac{jre^{jt} dt}{(re^{jt})^n} = j \int_0^{2\pi} r^{(1-n)} e^{jt(1-n)} dt = \frac{j}{r^{(n-1)}} \int_0^{2\pi} e^{jt(1-n)} dt =$$

$$= \begin{cases} j \cdot \int_0^{2\pi} e^0 dt = j \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi j & \text{dla } n = 1 \\ \frac{j}{r^{(n-1)}} \int_0^{2\pi} [\cos(t(1-n)) + j\sin(t(1-n))]dt = 0, & \text{dla } n \neq 1 \end{cases}$$

Tw. 2. (**podstawowe Cauchy'ego**)

Jeżeli funkcja f jest holomorficzna na obszarze jednospójnym D,

$C \subseteq D$ – dowolną krzywą Jordana kawałkami gładką, to niezależnie od skierowania tej krzywej zachodzi równość

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

Dowód twierdzenia 2. jest wnioskiem z twierdzenia Greena i definicji całki funkcji zespolonej.

Przypomnijmy, że zachodzi równość $\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + j \cdot \oint_C vdx + udy.$

Ponadto, jeśli funkcja f jest holomorficzna w obszarze jednospójnym zawierającym krzywą C, to funkcje u i v są klasy C^1 i spełnione są tam warunki Cauchy'ego-Riemanna, czyli

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$

W takim razie do obliczenia całek krzywoliniowych można zastosować twierdzenie Greena.

Niech U - obszar ograniczony krzywą C. Wtedy:

$$\oint_C udx - vdy = \iint_U \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy = \iint_U 0dxdy = 0$$

$$\oint_C vdx + udy = \iint_U \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = \iint_U 0dxdy = 0$$

Więc ostatecznie dostaniemy $\oint_C f(z)dz = 0.$

Fakt 1. Jeżeli funkcja f jest holomorficzna na obszarze jednospójnym D, to dla dowolnych punktów $A, B \in D$ wartość całki $\int_{\widehat{AB}} f(z)dz$ nie zależy od kształtu łuku $\widehat{AB}$,

a jedynie od punktów A i B. Można więc pisać $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$, gdzie $z_1 = A,\ z_2 = B$

Fakt 2. Jeżeli funkcja f jest holomorficzna na obszarze jednospójnym D,

F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f (czyli $F'(z) = f(z)$),

to dla dowolnych $z_1, z_2 \in D$ zachodzi równość

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1).$$

Przykład 2. Obliczymy całki wykorzystując funkcję pierwotną.

a) Całka z przykładu 1a) $\int\limits_{\widehat{AB}} z dz$,

gdzie łuk $\widehat{AB}$ to ćwierć okręgu o równaniu $|z| = 1$ od $A = 1$ do $B = j$.

Funkcja $f(z) = z$ jest holomorficzna (jako wielomian) i jej funkcja pierwotna to $F(z) = \frac{1}{2}z^2 + c$, gdzie c - dowolna stała zespolona.

Na mocy Tw. Cauchy'ego (fakt 2) mamy: $\int\limits_{\widehat{AB}} z dz = \int_1^j z dz = \left[\frac{1}{2}z^2\right]_1^j = \frac{1}{2}(j^2 - 1^2) = -1$

b) Całka z przykładu 1b) $\int\limits_{\widehat{AB}} |z| dz$,

gdzie łuk $\widehat{AB}$ to lewa połowa okręgu o równaniu $|z| = 1$ od $A = j$ do $B = -j$.

Funkcja $f(z) = |z|$ nie jest holomorficzna, ale na łuku $\widehat{AB}$ zachodzi równość $f(z) = 1$,

tak więc $\int\limits_{\widehat{AB}} |z| dz = \int\limits_{\widehat{AB}} 1 dz = \int_j^{-j} dz = \left[z\right]_j^{-j} = -j - j = -2j$.

c) Całka $\int_0^{j\pi} (3z^2 - 4e^{2z} - \sin z) dz$ może być obliczona z wykorzystaniem funkcji pierwotnej, gdyż funkcja podcałkowa jest holomorficzna jako złożenie wielomianu, funkcji wykładniczej i trygonometrycznej.

$$\int_0^{j\pi} (3z^2 - 4e^{2z} - \sin z) dz = \left[z^3 - 2e^{2z} + \cos z\right]_0^{j\pi} = (j\pi)^3 - 2e^{2j\pi} + \cos(j\pi) + 2e^0 - \cos 0 =$$

$$= -j\pi^3 - 2 + \frac{e^{j^2\pi} + e^{-j^2\pi}}{2} + 2 - 1 = -j\pi^3 + \frac{e^{-\pi} + e^{\pi}}{2} - 1$$

Fakt 3. Jeżeli funkcja f jest holomorficzna na obszarze jednospójnym D z wyjątkiem punktów $z_1, z_2, \ldots, z_m$, to dla każdej krzywej Jordana $C \subseteq D$ zawierającej te punkty w swoim wnętrzu zachodzi równość

$$\oint\limits_C f(z) dz = \sum_{i=1}^{m} \oint\limits_{K_i} f(z) dz,$$

gdzie K_i to okręgi $K_i = K(z_i; r_i)$ leżące wewnątrz C, promienie r_i są odpowiednio małe, tak że okręgi K_i leżą na zewnątrz siebie; krzywa C i okręgi są zorientowane dodatnio względem wnętrza.

Z Uwagi 2. i Faktu 3. wynika sposób obliczania całek po krzywych Jordana dowolnych funkcji wymiernych.

Przykład 3. Obliczymy całkę z funkcji $f(z) = \dfrac{2}{z(z-2)}$ po zadanych krzywych zamkniętych C zorientowanych dodatnio względem wnętrza.

Funkcja $f(z) = \dfrac{2}{z(z-2)}$ jest holomorficzna wszędzie poza punktami $z_1 = 0$, $z_2 = 2$.

Wartość całki zależy od tego, czy punkty osobliwe leżą wewnątrz, czy na zewnątrz krzywej C.

a) Niech krzywa $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - j| = 1\}$ dodatnio zorientowana względem wnętrza, czyli okrąg o środku w punkcie $z_0 = 1 + j$ i promieniu $r = 1$. Punkty 0 i 2 leżą na zewnątrz krzywej C, więc istnieje obszar jednospójny $D \supseteq C$, na którym funkcja $f(z)$ jest holomorficzna.

W takim razie $\oint\limits_C \frac{2}{z(z-2)} dz = 0$

b) Niech krzywa $C = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| = 1\}$, czyli to kwadrat o wierzchołkach: $1, j, -1, -j$ dodatnio zorientowany względem wnętrza.

Punkt 0 leży wewnątrz tego kwadratu, a punkt 2 - na zewnątrz.

W takiej sytuacji wartość całki będzie równa całce funkcji $f(z)$ po pewnym okręgu K o środku w $z_1 = 0$ i promieniu r odpowiednio małym, tak by ten okrąg zawierał się we wnętrzu kwadratu C.

$$\oint\limits_C \frac{2}{z(z-2)} dz = \oint\limits_K \frac{2}{z(z-2)} dz.$$

Aby dokonać obliczeń rozłożymy funkcję $f(z)$ na sumę ułamków prostych.

$$f(z) = \frac{2}{z(z-2)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z}.$$

Funkcja $\frac{1}{z-2}$ jest nieholomorficzna jedynie w punkcie $z_2 = 2$ leżącym na zewnątrz krzywej C, więc całka $\oint\limits_C \frac{1}{z-2} dz = 0$.

Funkcja $\frac{1}{z}$ jest nieholomorficzna jedynie w punkcie $z_1 = 0$ leżącym wewnątrz krzywej C.

Mamy więc $\oint\limits_C \frac{1}{z} dz = \oint\limits_K \frac{1}{z - z_1} dz = 2\pi j$, zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego.

Ostatecznie dostaniemy

$$\oint\limits_C \frac{2}{z(z-2)} dz = \oint\limits_K \frac{2}{z(z-2)} dz = \oint\limits_K \frac{1}{z-2} dz - \oint\limits_K \frac{1}{z} dz = 0 - 2\pi j = -2\pi j.$$

c) Niech krzywa $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - j| = 4\}$, czyli okrąg o środku w punkcie $z_0 = j$ i promieniu $r = 4$. Punkty 0 i 2 leżą wewnątrz krzywej C.

W takiej sytuacji wartość całki z funkcji f po tym okręgu będzie równa sumie całek po dwóch małych rozłącznych okręgach: K_1 - okrąg o środku w $z_1 = 0$, K_2 - okrąg o środku w $z_2 = 2$.

$$\oint\limits_C \frac{2}{z(z-2)} dz = \oint\limits_{K_1} \frac{2}{z(z-2)} dz + \oint\limits_{K_2} \frac{2}{z(z-2)} dz$$

$$\oint\limits_{K_1} \frac{2}{z(z-2)} dz = \oint\limits_{K_1} (\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z}) dz = \oint\limits_{K_1} \frac{1}{z-2} dz - \oint\limits_{K_1} \frac{1}{z} dz = 0 - 2\pi j = -2\pi j.$$

Pierwsza całka jest równa 0, bo funkcja $\frac{1}{z-2}$ jest holomorficzna w otoczeniu punktu $z_1 = 0$, druga całka jest obliczona na podstawie tw. Cauchy'ego.

$$\oint\limits_{K_2} \frac{2}{z(z-2)} dz = \oint\limits_{K_2} (\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z}) dz = \oint\limits_{K_2} \frac{1}{z-2} dz - \oint\limits_{K_2} \frac{1}{z} dz = 2\pi j - 0 = 2\pi j.$$

Taraz pierwsza całka jest równa $2\pi j$ na podstawie tw. Cauchy'ego, a druga równa 0, bo funkcja $\frac{1}{z}$ jest holomorficzna w otoczeniu punktu $z_2 = 2$.

Ostatecznie dostaniemy $\oint\limits_C \frac{2}{z(z-2)}dz = \oint\limits_{K_1} \frac{2}{z(z-2)}dz + \oint\limits_{K_2} \frac{2}{z(z-2)}dz = -2\pi j + 2\pi j = 0.$

Tw. 3. (**wzór całkowy Cauchy'ego**) Jeżeli funkcja f jest holomorficzna na obszarze jednospójnym D, $C \subseteq D$ jest dodatnio zorientowaną kawałkami gładką krzywą Jordana, to dla każdego punktu z_0 należącego do wnętrza krzywej C prawdziwa jest równość

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Twierdzenie to pozwala wyrazić wartości funkcji holomorficzej w punktach obszaru za pomocą wartości tej funkcji na brzegu tego obszaru.

I odwrotnie: możemy obliczyć wartość całki

$$\oint\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi j \cdot f(z_0)$$

przy założeniu, że funkcja $f(z)$ jest holomorficzna w pewnym obszarze $D \supseteq C$.

Przykład 4. Obliczymy całki wykorzystując wzór całkowy Cauchy'ego.

a) Całka funkcji $f(z) = \frac{e^{jz}}{z^2+1} = \frac{e^{jz}}{(z-j)(z+j)}$

po dodatnio zorientowanym okręgu $C = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 2\}$.

Punkty osobliwe funkcji $f(z)$ to $z_1 = j$, $z_2 = -j$ i oba leżą wewnątrz krzywej C, więc

$$\oint\limits_C \frac{e^{jz}}{(z-j)(z+j)}dz = \oint\limits_{K_1} \frac{e^{jz}}{(z-j)(z+j)}dz + \oint\limits_{K_2} \frac{e^{jz}}{(z-j)(z+j)}dz,$$

gdzie K_1 to pewien dodatnio zorientowany okrąg o środku w $z_1 = j$, K_2 to pewien dodatnio zorientowany okrąg o środku w $z_2 = -j$, okręgi te są rozłączne i leżą wewnątrz krzywej C.

Dalej obliczymy całki osobno.

$$\oint\limits_{K_1} \frac{e^{jz}}{(z-j)(z+j)}dz = \oint\limits_{K_1} \frac{(\frac{e^{jz}}{z+j})}{z-j}dz = \oint\limits_{K_1} \frac{h_1(z)}{z-j}dz = 2\pi j \cdot h_1(j) = 2\pi j \frac{e^{j^2}}{j+j} = \pi e^{-1}$$

Wykorzystany został wzór całkowy Cauchy'ego dla funkcji $h_1(z) = \frac{e^{jz}}{z+j}$,

holomorficznej w pewnym otoczeniu punktu $z_1 = j$.

$$\oint\limits_{K_2} \frac{e^{jz}}{(z-j)(z+j)}dz = \oint\limits_{K_2} \frac{(\frac{e^{jz}}{z-j})}{z+j}dz = \oint\limits_{K_2} \frac{h_2(z)}{z+j}dz = 2\pi j \cdot h_2(-j) = 2\pi j \frac{e^{-j^2}}{-j-j} = -\pi e^1$$

Wykorzystany został wzór całkowy Cauchy'ego dla funkcji $h_2(z) = \frac{e^{jz}}{z-j}$, holomorficznej w pewnym otoczeniu punktu $z_2 = -j$.

Ostatecznie $\displaystyle\oint_C \frac{e^{jz}}{z^2+1}dz = \pi e^{-1} - \pi e.$

b) Całka z przykładu 3b) czyli $\displaystyle\oint_C \frac{2}{z(z-2)}dz$, gdzie punkt osobliwy $z_1 = 0$ leży wewnątrz krzywej, a $z_2 = 2$ leży na zewnątrz krzywej C.

W takiej sytuacji mamy

$$\oint_C \frac{2}{z(z-2)}dz = \oint_K \frac{2}{z(z-2)}dz = \oint_K \frac{(\frac{2}{z-2})}{z-0}dz = \oint_K \frac{h(z)}{z-0}dz = 2\pi j \cdot h(0) = 2\pi j \cdot \frac{2}{-2} = -2\pi j.$$

Wykorzystany został wzór całkowy Cauchy'ego dla funkcji $h(z) = \dfrac{2}{z-2}$, holomorficznej w pewnym obszarze zawierającym okrąg K o środku w punkcie osobliwym $z_1 = 0$.

Tw. 4. Funkcja f holomorficzna w obszarze D ma w tym obszarze pochodne wszystkich rzędów i dla każdego $z_0 \in D$ oraz $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$

gdzie C jest dowolnym okręgiem o środku w z_0 zawartym wraz ze swoim wnętrzem w obszarze D.

Przykład 5. Obliczymy całkę $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)^2}$,

gdzie $C = \{z \in \mathbb{C} : \; |z-j| = 1\}$ - okrąg dodatnio zorientowany względem wnętrza.

Funkcja podcałkowa $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2} = \dfrac{1}{(z-j)^2(z+j)^2}$ ma dwa punkty osobliwe:

$z_1 = j$ leżący wewnątrz krzywej C i $z_2 = -j$ leżący na zewnątrz krzywej C.

Na mocy faktu 3. i tw. 4. mamy

$$\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \oint_C \frac{1}{(z-j)^2(z+j)^2}dz = \oint_C \frac{(\frac{1}{(z+j)^2})}{(z-j)^2}dz = \oint_C \frac{h(z)}{(z-j)^2}dz = \frac{2\pi j}{1!}h'(j)$$

Zastosowano równość z twierdzenia 4. dla $n = 1$ i funkcji $h(z) = \dfrac{1}{(z+j)^2}$,

holomorficznej w pewnym otoczeniu punktu $z_1 = j$.

Pochodna funkcji $h(z)$ to $h'(z) = \dfrac{-2}{(z+j)^3}$, $\quad h'(j) = \dfrac{-2}{(j+j)^3} = \dfrac{-2}{-8j} = -\dfrac{1}{4}j.$

Ostatecznie $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{(z^2+1)^2} = 2\pi j \cdot (-\frac{1}{4}j) = \frac{\pi}{2}.$