Pochodna funkcji zmiennej zespolonej

Zał. Funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu z_0.

Def. 1. Pochodną funkcji f w punkcie z_0 nazywamy liczbę zespoloną

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Przykład 1. Obliczanie pochodnej z definicji.

a) Niech $f(z) = c = \text{const}$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{c - c}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{0}{\Delta z} = 0$$

Pochodna funkcji stałej jest równa 0.

b) Niech $f(z) = z$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0 + \Delta z - z_0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1$$

Wniosek: $(z)' = 1$.

c) Niech $f(z) = z^2$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0^2 + 2z_0 \Delta z + (\Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z(2z_0 + \Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0$$

Wniosek: $(z^2)' = 2z$.

Uwaga: (Wyprowadzenie wzorów na pochodną w punkcie)

Zał. $f'(z_0)$ istnieje oraz $f(z) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ i $z_0 = x_0 + jy_0$.

$$f'(z_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + jv(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - jv(x_0, y_0)}{\Delta x + j\Delta y} =$$

$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + j\Delta y} + j \cdot \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + j\Delta y}$$

Jeśli wartość $f'(z_0)$ istnieje, to jest taka sama dla wszystkich przyrostów $(\Delta x, \Delta y)$. W szczególności dla $(\Delta x, 0) \to (0, 0)$ dostaniemy:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + j \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

dla $(0, \Delta y) \to (0,0)$ uzyskamy:

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - j \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Tw. 1. (**Warunek konieczny istnienia pochodnej**)

Jeżeli istnieje $f'(z_0)$, to istnieją $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ i spełnione są równości

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

które nazywamy **warunkami Cauchy'ego-Riemanna** (warunki C-R).

Uwaga: Warunek konieczny nie jest wystarczający do istnienia pochodnej funkcji.

Przykład 2.

Niech $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ taka, że

$$u(x,y) = v(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \cdot y = 0 \\ 0, & \text{gdy } x \cdot y \neq 0 \end{cases}$$

Sprawdzimy warunki Cauchy'ego-Riemanna w punkcie $z_0 = 0$.

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0$, bo $u(x,0) = 1$ dla dowolnego x, a pochodna funkcji stałej jest równa 0.

$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0$, bo $v(0,y) = 1$ dla dowolnego y, a pochodna funkcji stałej jest równa 0.

Mamy więc $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0$.

$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0$, bo $v(x,0) = 1$ dla dowolnego x, a pochodna funkcji stałej jest równa 0.

$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$, bo $u(0,y) = 1$ dla dowolnego y, a pochodna funkcji stałej jest równa 0.

Mamy więc $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 0$

Czyli warunki Cauchy'ego-Riemanna dla funkcji f w punkcie $z_0 = 0$ są spełnione.

Ale pochodna $f'(0)$ nie istnieje.

Można wziąć ciąg argumentów $(z_n) = (x_n + jy_n)$ zbieżny do $z_0 = 0$ taki, że $x_n \cdot y_n \neq 0$.

Dla takiego ciągu będzie $f(z_n) = 0$ dla każdego n.

Z definicji pochodnej badamy granicę $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{f(0 + z_n) - f(0)}{z_n} = \lim\limits_{z_n \to 0} \frac{0 - (1+j)}{z_n}$,

a ta granica nie istnieje.

Tw. 2. (**Warunek wystarczający istnienia pochodnej**)

Jeżeli funkcje $u(x,y)$, $v(x,y)$ spełniają w punkcie (x_0,y_0) warunki C-R
i na pewnym otoczeniu punktu (x_0,y_0) są klasy C^1,
to funkcja $f(z)=u(x,y)+j\,v(x,y)$ ma pochodną w punkcie $z_0=x_0+jy_0$
i zachodzą równości

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+j\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)-j\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Podobnie jak dla funkcji zmiennej rzeczywistej wprowadza się pojęcie **pochodnej funkcji** zmiennej zespolonej. Jeśli f jest funkcją, która posiada pochodną w każdym punkcie pewnego zbioru, to jej pochodną oznaczamy przez f'.

Przykład 3. Wyznaczymy pochodne podanych funkcji wszędzie, gdzie istnieją.

a) $f(z)=\operatorname{Re} z$

$f(z)=\operatorname{Re} z=x$, więc $u(x,y)=x$, $v(x,y)=0$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

Warunek $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ nigdzie nie jest spełniony, więc funkcja f nie posiada pochodnej w żadnym punkcie.

b) $f(z)=z\cdot\operatorname{Re} z$

$f(z)=z\operatorname{Re} z=(x+jy)\cdot x=x^2+jxy$, więc $u(x,y)=x^2$, $v(x,y)=xy$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \dfrac{\partial v}{\partial y}=x$

Warunek $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$ będzie spełniony, gdy $2x=x$, czyli dla $x=0$.

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \dfrac{\partial v}{\partial x}=y$

Warunek $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ oznacza $0=-y$, będzie spełniony dla $y=0$.

Warunki C-R będą spełnione jedynie dla $z=0$.

Pochodna $f'(0)$ istnieje, bo spełniony jest warunek wystarczający: funkcje $u(x,y)$ oraz $v(x,y)$ są klasy C^1.

$f'(0)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0)+j\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}(0,0)=0.$

c) $f(z) = e^z$

$f(z) = e^z = e^{x+jy} = e^x(\cos y + j\sin y) = e^x \cos y + je^x \sin y,$

więc $u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$

$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$

więc warunek $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ jest spełniony dla wszystkich $z = (x + jy)$.

$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y,$

więc warunek $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ jest spełniony dla każdego z.

Funkcja f posiada pochodną w każdym punkcie.

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + je^x \sin y = e^z$

Uwaga: Twierdzenia o działaniach arytmetycznych na pochodnych i o pochodnej funkcji złożonej pozostają prawdziwe dla funkcji zmiennej zespolonej.

Można wyprowadzić następujące wzory:

$(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$

$(e^{az})' = ae^{az}$

$(\sin z)' = \cos z$

$(\cos z)' = -\sin z$

Def. 2. Jeśli $F'(z) = f(z)$, to mówimy, że $F(z)$ jest **funkcją pierwotną** funkcji $f(z)$.

Funkcja holomorficzna

Def. 3. Mówimy, że f jest **funkcją holomorficzną** w punkcie z_0,

jeśli posiada pochodną $f'(z_0)$ oraz posiada pochodną w pewnym otoczeniu punktu z_0.

Uwaga: Funkcja holomorficzna w punkcie z_0 ma pochodną w tym punkcie,
ale nie na odwrót!
Funkcja może mieć pochodną w z_0 i może nie być holomorficzna w tym punkcie,
gdyż może nie mieć pochodnej w żadnym otoczeniu punktu z_0.
Tak jest np. w przypadku funkcji $f(z) = z \cdot \operatorname{Re} z$ (przykład 3b).

Def. 4. Funkcja f jest **holomorficzna w obszarze**, jeśli jest holomorficzna w każdym punkcie tego obszaru.

Uwaga: Funkcja jest holomorficzna w obszarze $\iff$ posiada pochodną w każdym punkcie tego obszaru.

Własności funkcji holomorficznych

- Funkcja holomorficzna posiada pochodne wszystkich rzędów (jest klasy C^∞).
- Jeśli funkcja f jest holomorficzna na $\mathbb{C}$ i jest ograniczona tzn. istnieje dodatnia liczba M taka, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$ spełniona jest nierówność $|f(z)| \leqslant M$, to f jest funkcją stałą.
- Jeśli $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ jest funkcją holomorficzną, to spełnione są równania różniczkowe Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Funkcje u i v spełniające równanie Laplace'a nazywamy **funkcjami harmonicznymi**.

Wniosek: Część rzeczywista $u(x,y)$ oraz część urojona $v(x,y)$ funkcji holomorficznej w pewnym obszarze są funkcjami harmonicznymi w tym obszarze.

Dwie funkcje harmoniczne $u(x,y)$ i $v(x,y)$, które spełniają równania C-R nazywamy **funkcjami harmonicznymi sprzężonymi**.

Fakt: Jeśli funkcja $u(x,y)$ (odpowiednio $v(x,y)$) jest harmoniczna w obszarze D, to istnieje funkcja harmoniczna $v(x,y)$ w D (odpowiednio $u(x,y)$) z nią sprzężona, taka że

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z), \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$$

dla pewnej funkcji $f(z)$ holomorficznej w obszarze $D \subseteq \mathbb{C}$.

Przykład 4. Znaleźć funkcję holomorficzną $f(z) = u + j\cdot v$, wiedząc, że:

a) $u(x,y) = -2xy, \quad f(0) = j$;

b) $v(x,y) = 2x^2 - 2y^2 + x$.