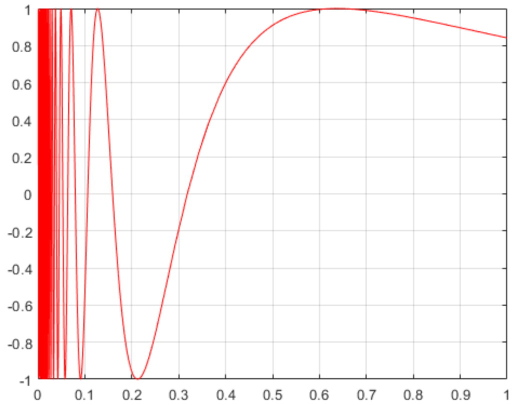
Szereg trygonometryczny Fouriera

Def. 1. Funkcję f, ograniczoną w przedziale (a, b), nazywamy **przedziałami monotoniczną** w tym przedziale, jeżeli przedział (a, b) można podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów, wewnątrz których funkcja f jest monotoniczna.

Uwaga 1: Nie każda funkcja ciągła jest przedziałami monotoniczna.
Przykład: funkcja $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.



Def. 2. Funkcja f spełnia w przedziale $[a, b]$ **warunki Dirichleta**, jeżeli

1. f jest przedziałami monotoniczna w przedziale (a, b);
2. f jest ciągła w przedziale (a, b) z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów nieciągłości pierwszego rodzaju, przy czym w każdym punkcie nieciągłości x_0 spełniony jest warunek
$$f(x_0) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to x_0^-} f(x) + \lim_{x\to x_0^+} f(x)\Big);$$
3. na końcach przedziału $[a, b]$ spełnione są równości
$$f(a) = f(b) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to b^-} f(x)\Big).$$

Warunki te nazywamy odpowiednio: pierwszym, drugim i trzecim **warunkiem Dirichleta**.

Def. 3. Szeregiem trygonometrycznym Fouriera funkcji f w przedziale $[-l, l]$, $l > 0$ nazywamy szereg funkcyjny postaci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\Big) \qquad (1)$$

przy czym

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Uwaga 2: Każdy składnik sumy w wyrażeniu (1) jest funkcją okresową.
Wspólnym okresem wszystkich składników jest $T = 2l$, gdyż

$$a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l} = a_n \cos\frac{n\pi(x+2l)}{l} + b_n \sin\frac{n\pi(x+2l)}{l}$$

Twierdzenie Dirichleta. Jeżeli funkcja f spełnia w przedziale $[-l, l]$, $l > 0$ warunki Dirichleta, to jest rozwijalna w tym przedziale w szereg trygonometryczny Fouriera, tzn.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (2)$$

dla każdego $x \in [-l, l]$. Ponadto, jeżeli f jest funkcją okresową o okresie $2l$, to równość (2) jest prawdziwa dla każdego $x \in D_f$.

Komentarz:

- Jeżeli funkcja $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ nie spełnia drugiego lub trzeciego warunku Dirichleta, czyli nie przyjmuje "wartości dirichletowskich" w punktach nieciągłości lub na krańcach przedziału $[-l, l]$, to równość (2) jest prawdziwa dla wszystkich punktów ciągłości funkcji f, a w pozostałych punktach szereg Fouriera (1) funkcji f jest zbieżny do wartości dirichletowskich w tych punktach.

- Jeżeli funkcja f jest określona na przedziele otwartym, to należy na krańcach tego przedziału dookreślić ją tak, aby spełniała warunki Dirichleta i wtedy dla tej nowej funkcji możemy zastosować twierdzenie Fouriera.

Uwaga 3. Rozwinięcie w szereg Fouriera funkcji spełniającej warunki Dirichleta w przedziale $[-l, l]$, $l > 0$ jest w tym przedziale jednoznaczne.

Przykład 1. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją okresową, której rozwinięcie w szereg Fouriera jest następujące: $f(x) = 5 + 3\sin 2x - 7\sin 5x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^3}\cos nx.$

Wspólny okres funkcji występujących w rozwinięciu jest równy $T = 2\pi$, stąd $l = \pi$ i możemy porównać współczyniki tego rozwinięcia z odpowiednimi współczynnikami szeregu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Dostaniemy:

$$\frac{a_0}{2} = 5, \text{ stąd } a_0 = 10 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{4}{n^3} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_2 = 3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 2x dx$$

$$b_5 = -7 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 5x dx$$

Dla pozostałych n będzie $b_n = 0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$

Przykład 2. Szeregiem Fouriera funkcji $f(x) = \sin(x)$ jest $\sin x$.

Brzmi to może dziwnie, ale możemy zapisać:

$\sin x = 0 + 0\cdot\cos x + 1\cdot\sin x + 0\cdot\cos 2x + 0\cdot\sin 2x + 0\cdot\cos 3x + 0\cdot\sin 3x + \ldots$

Jest to więc szereg, w którym wszystkie wyrazy poza jednym są równe 0.

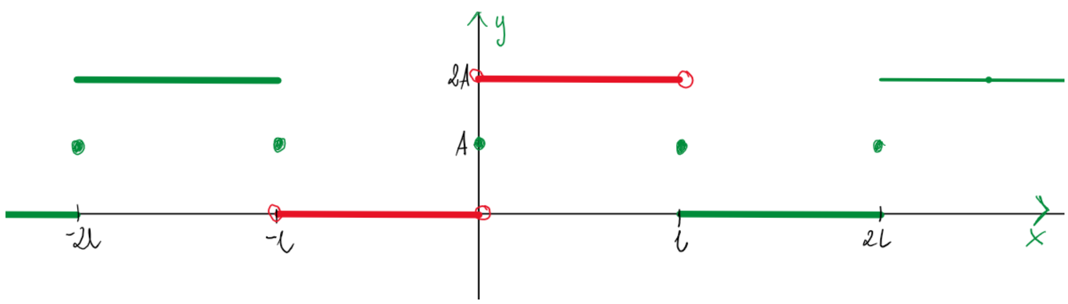
Przykład 3.

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję okresową f o okresie $T = 2l$, dla której zachodzi:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x \in (-l, 0) \\ 2A, & \text{dla } x \in (0, l) \end{cases} \qquad \text{gdzie } A, l > 0 \text{ – ustalone liczby.}$$

Funkcja określona tak, jak w tym przykładzie nazywana jest
sygnałem o przebiegu prostokątnym.

Na początku dookreślimy funkcję tak, by spełniała warunki Dirichleta.



W punkcie $x = 0$ przyjmiemy $f(0) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 0^+} f(x)) = \frac{1}{2}(0 + 2A) = A$.

Na krańcach przedziału przyjmiemy $f(-l) = f(l) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to -l^+} f(x) + \lim_{x\to l^-} f(x)) = \frac{1}{2}(0+2A) = A$.

Tak określona funkcja będzie się pokrywała z jej rozwinięciem w szereg Fouriera.

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\Big)$

Wyznaczymy współczynniki rozwinięcia, korzystając z wzorów z def. 3.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} 0dx + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} 2Adx = \frac{2A}{l}\int_{0}^{l} dx = \frac{2A}{l}\cdot l = 2A$$

dla $n = 1, 2, 3\ldots$ będzie

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} 2A\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2A}{l}\int_{0}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2A}{l}\Big[\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big]_0^l = 0$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} 2A\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2A}{l}\int_{0}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{2A}{l}\cdot\frac{l}{n\pi}\Big[-\cos\frac{n\pi x}{l}\Big]_0^l = \frac{2A}{n\pi}[\cos 0 - \cos n\pi] = \frac{2A}{n\pi}[1-(-1)^n] = \begin{cases} \frac{2A}{n\pi}\cdot 2, & \text{dla n nieparzystych;} \\ 0, & \text{dla n parzystych.} \end{cases}$$

Dla $n = 2k$ mamy $b_n = b_{2k} = 0$,

a dla $n = 2k-1$ mamy $b_n = b_{2k-1} = \frac{4A}{n\pi} = \frac{4A}{\pi(2k-1)}$.

Poza tym $a_0 = 2A$, a dla $n > 0$ $a_n = 0$.

Rozwinięcie funkcji f w szereg Fouriera będzie następujące:

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} = A + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4A}{\pi(2k-1)}\sin\frac{\pi(2k-1)x}{l}$.

Uwaga 4. Twierdzenie Dirichleta oraz określenie szeregu trygonometrycznego Fouriera będą prawdziwe również dla przypadku funkcji określonej w przedziale $[a, a+2l]$. Wtedy współczynnki we wzorach w definicji 3. będą określone następująco:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

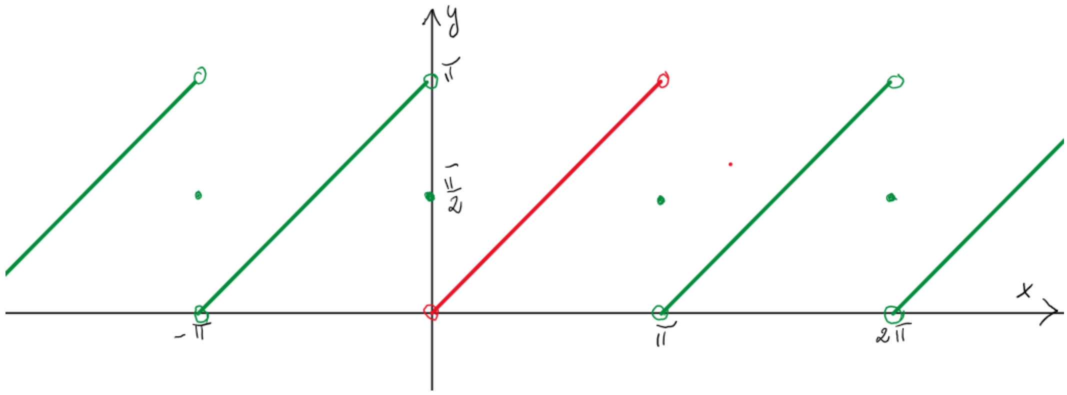
Przykład 4.

Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję okresową f o okresie $T = \pi$, i równą x na przedziale $(0, \pi)$.

Funkcja taka, jak w tym przykładzie nazywana jest ***sygnałem o przebiegu piłokształtnym*** (piłozębnym).

Na początku dookreślimy funkcję tak, by spełniała III warunek Dirichleta.

Na krańcach przedziału przyjmiemy $f(0) = f(\pi) = \frac{1}{2}(\lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to\pi^-} f(x)) = \frac{1}{2}(0+\pi) = \frac{\pi}{2}$.



Tak określona funkcja będzie się pokrywała z jej rozwinięciem w szereg Fouriera (we wzorze podstawiamy $l = \frac{\pi}{2}$, bo $T = 2l$).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\frac{\pi}{2}}\Big) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos 2nx + b_n \sin 2nx\Big)$$

Wyznaczymy współczynniki rozwinięcia, obliczając odpowiednie całki.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

dla $n = 1, 2, 3\ldots$ będzie

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\cos 2nxdx = \frac{2}{\pi}\Big(x\cdot\frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin 2nx}{2n}dx\Big) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(0 + \Big[\frac{\cos 2nx}{4n^2}\Big]_0^{\pi}\Big) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot\sin 2n\pi dx = \frac{2}{\pi}\Big(-x\cdot\frac{\cos 2nx}{2n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos 2nx}{2n}dx\Big) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(-\pi\cdot\frac{\cos 2n\pi}{2n} + \Big[\frac{\sin 2nx}{4n^2}\Big]_0^{\pi}\Big) = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{-\pi}{2n} + 0\Big) = -\frac{1}{n}$$

Rozwinięcie funkcji f w szereg Fouriera będzie następujące:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}\sin 2nx = \frac{\pi}{2} - \sin 2x - \frac{1}{2}\sin 4x - \frac{1}{3}\sin 6x - \ldots.$$

Uwaga 5. Jeżeli funkcja f spełnia warunki Dirichleta w przedziale $[-l, l]$, $l > 0$ oraz

1. jest funkcją parzystą, to otrzymujemy szereg Fouriera samych cosinusów

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \;\text{ i }\; b_n = 0 \;\text{ dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

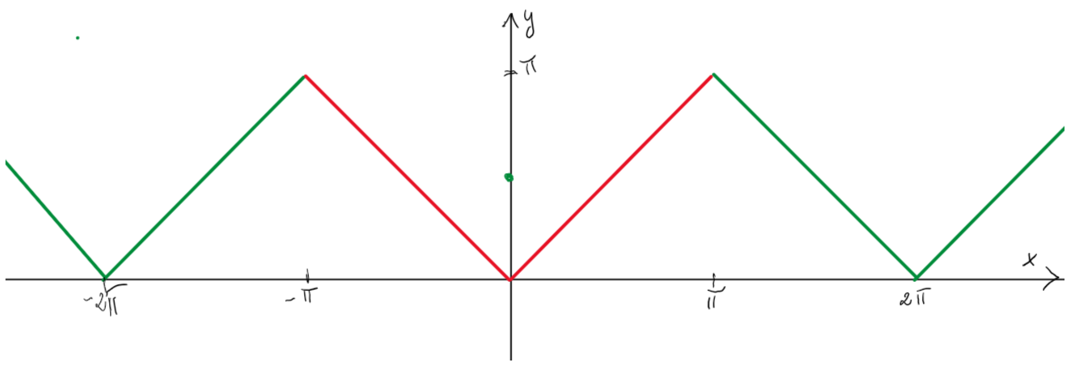
2. jest funkcją nieparzystą, to otrzymujemy szereg Fouriera samych sinusów

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \;\text{ i }\; a_n = 0 \;\text{ dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Przykład 6.

Wyznaczyć szereg Fouriera dla funkcji okresowej o okresie $T = 2\pi$, określonej na przedziale $[-\pi, \pi]$ wzorem $f(x) = |x|$.

Funkcja tak określona nazywana jest ***sygnałem trójkątnym***.



Tak określona funkcja spełnia warunki Dirichleta i będzie się pokrywała z jej rozwinięciem w szereg Fouriera (we wzorze podstawiamy $l = \pi$, bo $T = 2\pi$).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\Big)$$

Zauważmy, że funkcja f jest parzysta (spełnia warunek $f(-x) = f(x)$).

W takiej sytuacji $b_n = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Współczynniki a_n wyznaczymy, obliczając odpowiednie całki.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \cdot \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\Big(x \cdot \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n} dx\Big) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(0 + \Big[\frac{\cos nx}{n^2}\Big]_0^\pi\Big) = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & \text{dla} \quad n = 2k-1 \\ 0 & \text{dla} \quad n = 2k \end{cases}$$

Takie uzyskaliśmy współczynniki dla $n \neq 0$ (w obliczeniach było całkowanie przez części).

Dla a_0 wykonujemy obliczenie osobno, bo nie możemy zastosować wzoru powyżej, bo mielibyśmy dzielenie przez $n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

Ostatecznie dostajemy szereg

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

Wykorzystajmy jeszcze otrzymaną równość. Jest ona prawdziwa dla $x \in \mathbb{R}$.

Wstawmy do niej $x = 0$.

$$f(0)=0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 0}{(2k-1)^2}=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$$

Po prostym przekształceniu dostaniemy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}.$$

Uwaga 6. Jeżeli funkcja ϕ spełnia w przedziale $[-l,l]$, $l>0$ warunki Dirichleta, zaś funkcja f jest określona na tym samym przedziale i przyjmuje wartości różne od wartości funkcji ϕ tylko w skończonej liczbie punktów tego przedziału, to równość

$$f(x)=\phi(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\Big) \qquad (3)$$

gdzie szereg po prawej stronie (3) oznacza szereg Fouriera funkcji ϕ, będzie prawdziwa dla każdego $x\in[-l,l]$ z wyjątkiem tych punktów, w których wartości funkcji f i ϕ są różne.

Przykład 7.

Wyznaczyć szereg Fouriera dla funkcji okresowej o okresie $T=2\pi$, określonej na przedziale $[-\pi,\pi]$ wzorem $g(x)=|x|+\pi+3\sin 2x-\frac{1}{\pi}\cos 3x$.

Nie musimy liczyć całek, bo wszystkie potrzebne całki zostały obliczone w przykładzie 6.

Znamy rozwinięcie funkcji f z przykładu 6:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\Big(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\Big)$$

Wykorzystamy zwiazek $g(x)=f(x)+\pi+3\sin 2x-\dfrac{1}{\pi}\cos 3x$ i dostaniemy:

$$g(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\Big(\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\Big)+\pi+3\sin 2x-\frac{1}{\pi}\cos 3x=$$

$$=\frac{3\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x+3\sin 2x-\frac{4}{9\pi}\cos 3x-\frac{1}{\pi}\cos 3x-\frac{4}{\pi}\Big(\frac{\cos 5x}{5^2}+\frac{\cos 7x}{5^2}+\ldots\Big)=$$

$$=\frac{3\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos x+3\sin 2x-\frac{13}{9\pi}\cos 3x-\frac{4}{\pi}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Współczynniki szeregu Fouriera funkcji g są następujące:

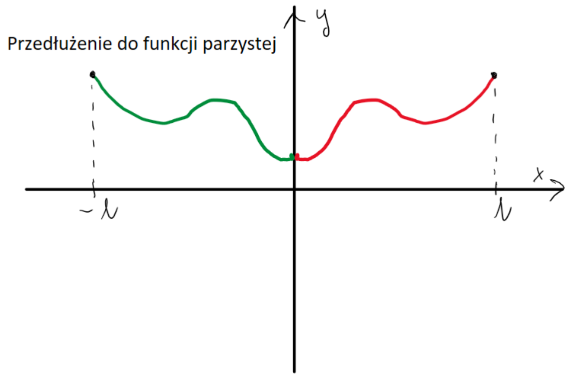
$a_0=3\pi$, $a_1=-\dfrac{4}{\pi}$, $a_3=-\dfrac{13}{9\pi}$, pozostałe: $a_{2k-1}=-\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}$, $a_{2k}=0$

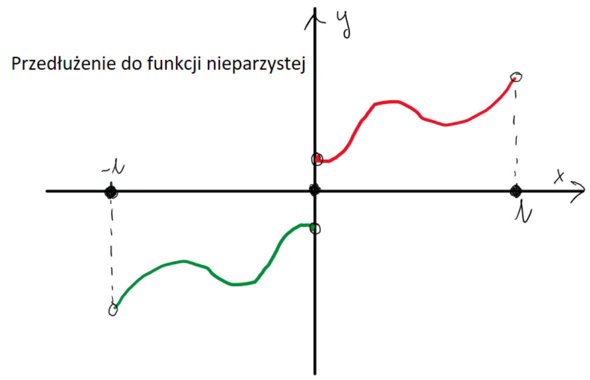
$b_2=3$, $b_n=0$ dla pozostałych n.

Uwaga 7. Jeżeli funkcja f spełnia w przedziale $(0,l)$ 1. i 2. warunek Dirichleta, to można ją przedłużyć do funkcji określonej w $[-l,l]$, tak aby spełniała wszystkie trzy warunki Dirichleta w tym przedziale.

W szczególności można ją przedłużyć do funkcji parzystej f^* – wtedy rozwinięcie w szereg samych cosinusów funkcji f^* będzie dla $x \in (0, l)$ rozwinięciem funkcji f.

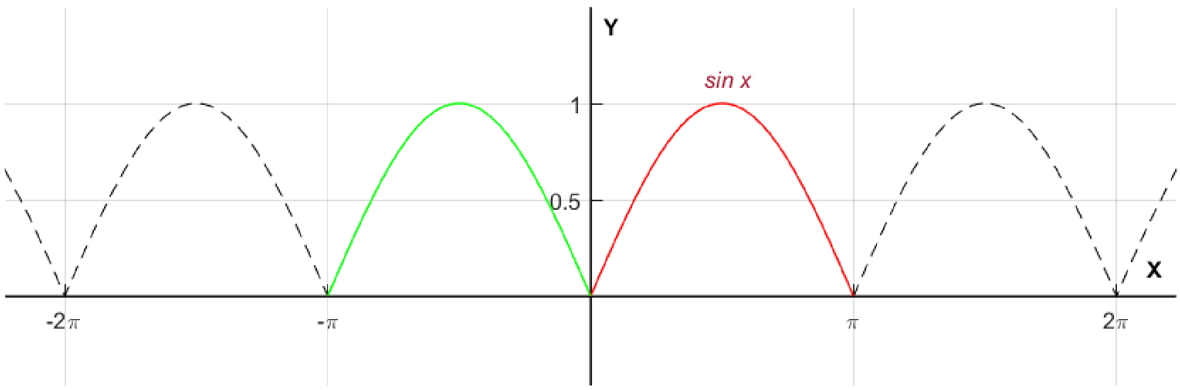
Można funkcję f przedłużyć do funkcji nieparzystej f^{**} – wtedy rozwinięcie w szereg samych sinusów funkcji f^{**} będzie dla $x \in (0, l)$ rozwinięciem funkcji f.





Przykład 8.

Rozwinąć w szereg samych cosinusów funkcję $f(x)$ równą $\sin x$ dla $x \in (0, \pi)$.
Aby uzyskać zadany szereg przedłużymy funkcję do funkcji f^* parzystej na przedziale $[-\pi, \pi]$, przyjmiemy $l = \pi$.



$$f^*(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ -\sin x, & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \\ 0, & \text{dla } x = 0, \pi, -\pi \end{cases}$$

Dalej rozwijamy juz funkcję parzystą f^*, dlatego wszystkie współczynniki $b_n = 0$ i trzeba wyznaczyć tylko a_n.

Szukane rozwinięcie będzie miało postać:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^*(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\cdot\cos nx dx = (*)$$

Wykorzystujemy wzór

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

i kontynuujemy obliczenia

$$(*) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\Big(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\Big)dx = \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\Big]_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\cos(n+1)\pi-1}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}\Big] = (*)$$

Dla $n=2k$ będzie $\cos(n+1)\pi = \cos(2k+1)\pi = \cos(2k-1)\pi = \cos(n-1)\pi = -1$,

a dla $n=2k+1$ będzie $\cos(n+1)\pi = \cos(2k+2) = \cos(2k)\pi = \cos(n-1)\pi = 1$.

Stąd dostaniemy dalej $a_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\Big[\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n-1}\Big] & \text{dla } n=2k \\ 0 & \text{dla } n=2k+1 \end{cases}$ (**)

Uwaga! We wzorze na a_n mamy w mianowniku $n-1$, więc nie można z niego skorzystać dla $n=1$. Współczynnik a_1 obliczamy osobno:

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\cdot\cos x dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin 2x dx = 0.$$

Współczynnika a_0 nie musimy liczyć osobno, możemy wstawić $n=0$ do wzoru (**).
Dostajemy $a_0 = \frac{4}{\pi}$.

Ostatecznie dostaniemy następujące rozwinięcie funkcji f w szereg cosinusów:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}\cos 2kx = \frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\Big[\frac{2}{2k+1}-\frac{2}{2k-1}\Big]\cos 2kx = \frac{2}{\pi}\Big(1-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}\Big).$$