### Całka potrójna

Niech $\overline{V} = [a;b]\times[c;d]\times[p;q]$ – ograniczony prostopadłościan, $n$ – liczba naturalna.

Niech $f$ - funkcja trzech zmiennych, ograniczona na $\overline{V}$.

Prostopadłościan $\overline{V}$ dzielimy na $n$ prostopadłościanów $\overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n}$ o rozłącznych wnętrzach i objętościach $|\overline{V_1}|, |\overline{V_2}|, \ldots, |\overline{V_n}|$.

Postępujemy tak dla każdego $n \in \mathbb{N}$, otrzymując ciąg podziałów $\overline{V}$.
Rozpatrujemy tylko ***normalne*** ciągi podziałów.
Dla ustalonego podziału $\overline{V_1}, \overline{V_2}, \ldots, \overline{V_n}$ wybieramy po jednym punkcie $A_k \in \overline{V_k}$ z każdego prostopadłościanu.

Tworzymy ***sumę całkową*** $S_n$ funkcji $f$ odpowiadającą temu wyborowi punktów:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(A_k) \cdot |\overline{V_k}|.$$

***Def. 1.*** Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów prostopadłościanu $\overline{V}$ istnieje ta sama granica właściwa $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ – niezależna od sposobów podziału $\overline{V}$ i wyboru punktów $A_k \in \overline{V_k}$, to wartość tej granicy nazywamy ***całką potrójną funkcji*** $f$ ***po prostopadłościanie*** $\overline{V}$ i oznaczamy następująco:

$$\iiint\limits_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz \quad \text{lub} \quad \iiint\limits_{\overline{V}} f(x,y,z)dv. \qquad (1)$$

Jeżeli całka $\iiint\limits_{\overline{V}} f(x,y,z)dv$ istnieje, to mówimy, że funkcja $f$ jest ***całkowalna*** w $\overline{V}$.

**Uwaga 1.** Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła w $\overline{V}$, to jest całkowalna w $\overline{V}$.

**Uwaga 2.** Całka potrójna posiada własności analogiczne do własności całki podwójnej.

**Uwaga 3.** Całka $\iiint\limits_{\overline{V}} dxdydz$ przedstawia objętość prostopadłościanu $\overline{V}$.

***Tw. 1. (O zamianie całki potrójnej na iterowaną)***
Jeżeli funkcja $f(x,y,z)$ jest ciągła w $\overline{V} = [a;b]\times[c;d]\times[p;q]$, to

$$\iiint\limits_{\overline{V}} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \Big(\int_c^d \Big(\int_p^q f(x,y,z)dz\Big)dy\Big)dx. \qquad (2)$$

Całka iterowana (2) jest równa każdej z pięciu pozostałych całek iterowanych, różniących się od niej tylko kolejnością całkowania.

***Przykład 1.*** Obliczyć całkę $\iiint\limits_{\overline{V}} yz\cos(xy)dxdydz$, gdzie $\overline{V} = \Big[0;\frac{\pi}{2}\Big]\times\Big[\frac{1}{2};1\Big]\times\Big[1;2\Big]$

$$\iiint\limits_{\overline{V}} yz\cos(xy)dxdydz = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big(\int_1^2\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} yz\cos(xy)dx\Big)dz\Big)dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big(\int_1^2\Big(yz\frac{\sin(xy)}{y}\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}\Big)dz\Big)dy =$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \Big( \int_{1}^{2} z \sin(\frac{\pi}{2}y) dz \Big) dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \Big( \frac{z^2}{2} \sin(\frac{\pi}{2}y) \Big|_{z=1}^{z=2} \Big) dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{3}{2} \sin(\frac{\pi}{2}y) dy = \frac{3}{2} \Big( -\frac{2}{\pi} \cos(\frac{\pi}{2}y) \Big) \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{3}{\pi} \cos\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2\pi}$$

***Tw. 2.*** Niech $\overline{D}$ – obszar regularny, $\phi_1, \phi_2$ – funkcje ciągłe w $\overline{D}$ oraz

$$\overline{U} = \{(x, y, z) : \ (x, y) \in \overline{D}, \ \phi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \phi_2(x, y)\}. \qquad (3)$$

Jeśli $f$ jest ciągła w $\overline{U}$, to jest całkowalna w $\overline{U}$ i zachodzi równość

$$\iiint_{\overline{U}} f(x, y, z) dxdydz = \iint_{\overline{D}} \Big( \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \Big) dxdy.$$

**Uwaga 4:** Twierdzenie 2 można uogólnić na całki potrójne po zbiorach postaci:

$$\overline{U_{yz}} = \{(x, y, z) : \ (y, z) \in \overline{D}, \ \phi_1(y, z) \leqslant x \leqslant \phi_2(y, z)\} \qquad (4)$$

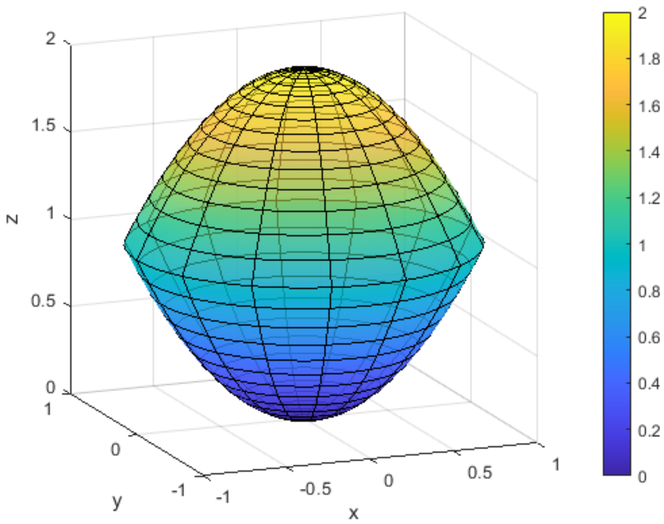
$$\overline{U_{xz}} = \{(x, y, z) : \ (x, z) \in \overline{D}, \ \phi_1(x, z) \leqslant y \leqslant \phi_2(x, z)\}. \qquad (5)$$

**Interpretacja geometryczna**

**Uwaga 5.** Całka $\iiint_{\overline{V}} dxdydz$ przedstawia objętość bryły $\overline{V}$.

***Przykład 2.*** Wyznaczyć objętość bryły $\overline{V}$ ograniczonej powierzchniami

$z = x^2 + y^2, \ z = 2 - x^2 - y^2.$




Bryła jest ograniczona przez dwie paraboloidy obrotowe.

Wyznaczymy zbiór punktów przecięcia tych powierzchni.

$z = x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \ \Rightarrow \ x^2 + y^2 = 1 \ \wedge z = 1$

Paraboloidy przecinają się wzdłuż okręgu. Bryła $\overline{V}$ jest zbiorem typu (3),

gdzie $\overline{D} = \{(x,y): \ x^2+y^2 \leqslant 1\}$, $\phi_1(x,y) = x^2+y^2$, $\phi_2(x,y) = 2-x^2-y^2$.

Do obliczenia jej objętości zastosujemy Tw. 2 i Uwagę 5.

$$\text{Objętość } \overline{V} = \iiint\limits_{\overline{V}} 1 dxdydz = \iint\limits_{\overline{D}} \Big( \int\limits_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dz \Big) dxdy = \iint\limits_{\overline{D}} \Big(2-x^2-y^2-(x^2+y^2)\Big) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\overline{D}} \Big(2-2(x^2+y^2)\Big) dxdy = \int\limits_0^{2\pi} \Big( \int\limits_0^1 (2-r^2) r dr \Big) d\phi = \int\limits_0^{2\pi} \Big(r^2 - \frac{r^4}{2}\Big|_0^1\Big) d\phi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\phi = \pi$$

**Zamiana zmiennych w całce potrójnej**

Niech przekształcenie $\overline{T}: \overline{\Omega} \to \overline{U}$, gdzie $\overline{\Omega}, \overline{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ – przestrzenne zbiory regularne,

$T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$.

***Tw. 3.*** Jeżeli

1. funkcja $f$ jest ciągła w $\overline{U}$;
2. przekształcenie $T$ jest różnowartościowe oraz klasy $C^1$ i przekształca wnętrze obszaru $\overline{\Omega}$ na wnętrze obszaru $\overline{U}$;
3. jakobian $\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$ jest różny od zera we wnętrzu obszaru $\overline{\Omega}$,

to $\displaystyle\iiint\limits_{\overline{U}} f(x,y,z) dxdydz = \iiint\limits_{\overline{\Omega}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| dudvdw.$

***Przykład 3.*** Obliczyć całkę $\displaystyle\iiint\limits_{\overline{U}} \frac{(x+y)(x-y)^2}{(5x-3y+z)^2} dxdydz$,

gdzie $\overline{U} = \{(x,y,z): \ 0 \leqslant x+y \leqslant 3, \ 1 \leqslant x-y \leqslant 2, \ 1 \leqslant 5x-3y+z \leqslant 3\}$

Bryła $\overline{U}$ jest równoległościanem.

Wprowadzamy nowe zmienne: $u = x+y$, $v = x-y$, $w = 5x-3y+z$

i zastosujemy Tw. 3.

Gdy $(x,y,z) \in \overline{U}$, wtedy $(u,v,w) \in \overline{\Omega} = [0,3] \times [1,2] \times [1,3]$.

$x(u,v,w) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$, $\quad y(u,v,w) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v$, $\quad z(u,v,w) = w-u-4v$

Odwzorowanie $T: (u,v,w) \mapsto \Big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\Big)$ ma wymagane własności.

$x_u = \frac{\partial}{\partial u}(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v) = \frac{1}{2}$, $\quad x_v = \frac{\partial}{\partial v}(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v) = \frac{1}{2}$ $\quad x_w = \frac{\partial}{\partial w}(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v) = 0$

$y_u = \frac{\partial}{\partial u}(\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v) = \frac{1}{2}$, $\quad y_v = \frac{\partial}{\partial v}(\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v) = -\frac{1}{2}$ $\quad y_w = \frac{\partial}{\partial w}(\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v) = 0$

$z_u = \frac{\partial}{\partial u}(w-u-4v) = -1$, $\quad z_v = \frac{\partial}{\partial v}(w-u-4v) = -4$ $\quad z_w = \frac{\partial}{\partial w}(w-u-4v) = 1$

Wyznaczamy jakobian odwzorowania $T$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Obliczamy całkę z wykorzystaniem opisanej zamiany zmiennych.

$$\iiint\limits_{U} \frac{(x+y)(x-y)^2}{(5x-3y+z)^2} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} \frac{uv^2}{w^2} \cdot \frac{1}{2} dudvdw = \frac{1}{2} \int_1^3 \Big( \int_1^2 \Big( \int_0^3 \frac{uv^2}{w^2} du \Big) dv \Big) dw =$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{w^2} dw \cdot \int_1^2 v^2 dv \cdot \int_0^3 u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{w}\Big|_1^3 \cdot \frac{v^3}{3}\Big|_1^2 \cdot \frac{u^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$$

## Współrzędne sferyczne

Do obliczania całek po zbiorach będących fragmentami kuli wygodne mogą być tzw. współrzędne sferyczne.

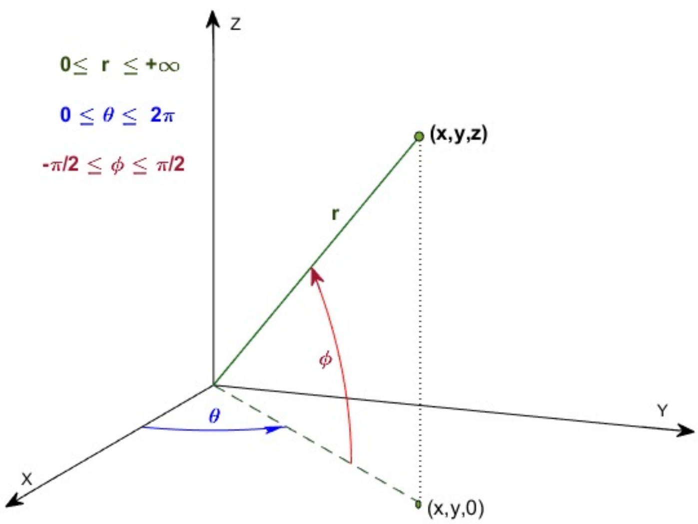
Jeżeli zmienne $x, y, z$ zastąpimy zmiennymi $r, \phi, \theta$, gdzie

$$x = r\cos\phi\cos\theta, \quad y = r\cos\phi\sin\theta, \quad z = r\sin\phi$$

($r$ jest odległością punktu $(x,y,z)$ od punktu $(0,0,0)$)

$r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ – ***współrzędne sferyczne***,

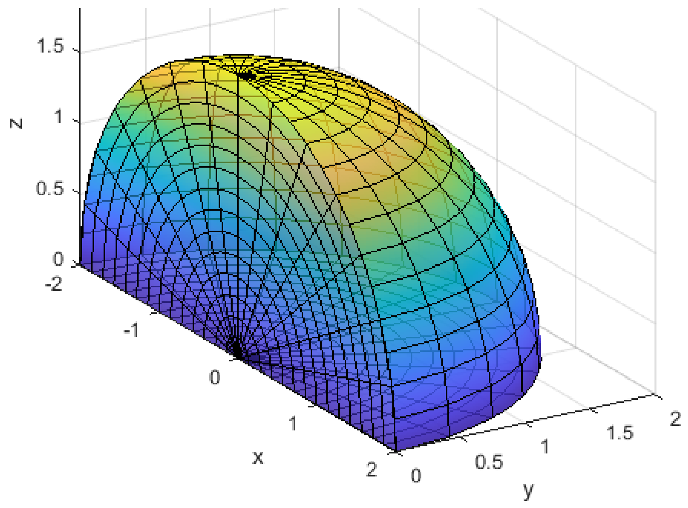
to $$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi & 0 & r\cos\phi \end{vmatrix} = r^2\cos\phi$$



***Przykład 4.*** Obliczyć całkę $\displaystyle\iiint\limits_{\overline{V}} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$,

gdzie $\overline{V} = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$.

Bryła $\overline{V}$ jest ćwiartką kuli.




Do obliczeń wykorzystamy współrzędne sferyczne $r, \phi, \theta$.

Przyjmujemy $x = r\cos\phi\cos\theta$, $y = r\cos\phi\sin\theta$, $z = r\sin\phi$, $J = r^2\cos\phi$.

Gdy $(x,y,z) \in \overline{V}$, wtedy $r \in [0,2]$, $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\theta \in [0,\pi]$, $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$.

$$\iiint\limits_{\overline{V}} y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} r\cos\phi\sin\theta \cdot r \cdot r^2\cos\phi\,drd\phi d\theta = \int_0^{\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{2} r^4\sin\theta\cos^2\phi\,dr\Big)d\phi\Big)d\theta =$$

$$\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\phi\,d\phi \cdot \int_0^{2} r^4 dr = -\cos\theta\Big|_0^{\pi} \cdot \frac{1}{2}(1+\frac{\sin 2\phi}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^5}{5}\Big|_0^{2} = 2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{32}{5} = \frac{16}{5}\pi.$$

**Zmodyfikowane współrzędne dla elipsoidy.**

**Uwaga:** Do obliczania całek po obszarach ograniczonych elipsoidą: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$
wygodne mogą być zmodyfikowane zmienne:

$x, y, z$ zastępujemy zmiennymi $r, \phi, \theta$, gdzie

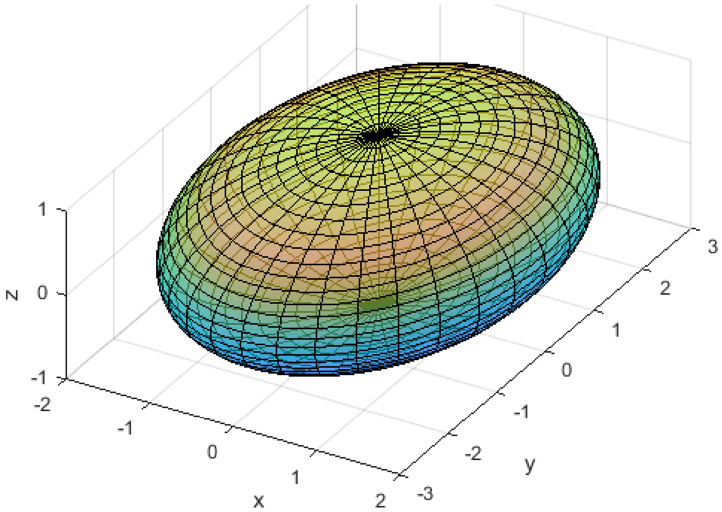
$x = ar\cos\phi\cos\theta$, $y = br\cos\phi\sin\theta$, $z = cr\sin\phi$ i jakobian $J = abcr^2\cos\phi$.

Dla pełnej elipsoidy przyjmujemy zakresy zmiennych: $r \in [0,1]$, $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

***Przykład 5.*** Obliczyć objętość bryły $\overline{E} = \{(x,y,z):\ 9x^2+4y^2+36z^2 \leqslant 36\}$.

$9x^2+4y^2+36z^2 \leqslant 36 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+z^2 \leqslant 1$

Bryła $\overline{E}$ jest elipsoidą o półosiach: $a=2$, $b=3$, $c=1$.




Objętość bryły obliczymy jako całkę $|\overline{E}| = \iiint\limits_{\overline{E}} dxdydz$

z wykorzystaniem następującej zamiany zmiennych:

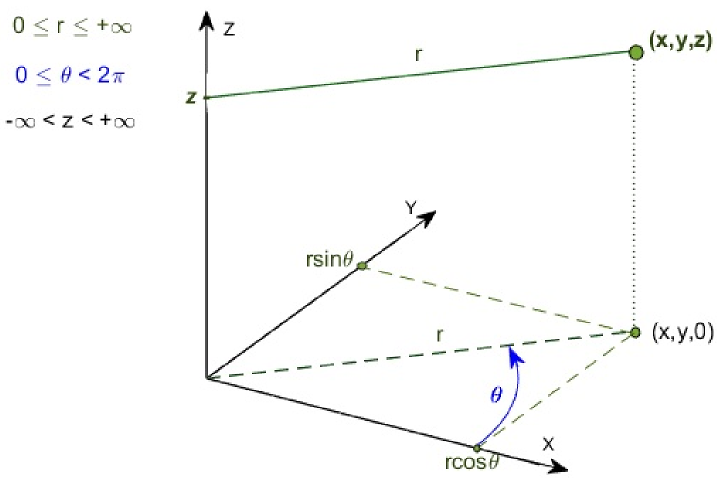
$x = 2r\cos\phi\cos\theta, \quad y = 3r\cos\phi\sin\theta, \quad z = r\sin\phi$ i jakobian $J = 6r^2\cos\phi$.

Przyjmiemy następujące zakresy zmiennych: $r \in [0,1], \ \phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \ \theta \in [0, 2\pi]$.

$$|\overline{E}| = \iiint\limits_{\overline{E}} dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} 6r^2\cos\phi drd\phi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \Big( \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big( \int\limits_0^1 6r^2\cos\phi\, dr \big) d\phi \Big) d\theta =$$

$$= 6\int\limits_0^{2\pi} d\theta \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\, d\phi \cdot \int\limits_0^1 r^2 dr = 6 \cdot 2\pi \cdot \sin\phi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^1 = 8\pi.$$

**Współrzędne walcowe (cylindryczne)**



Jeżeli zmienne $x, y, z$ zastąpimy zmiennymi $r, \theta, z$, gdzie

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z$$

($r$ jest odległością punktu $(x, y, z)$ od osi $OZ$)

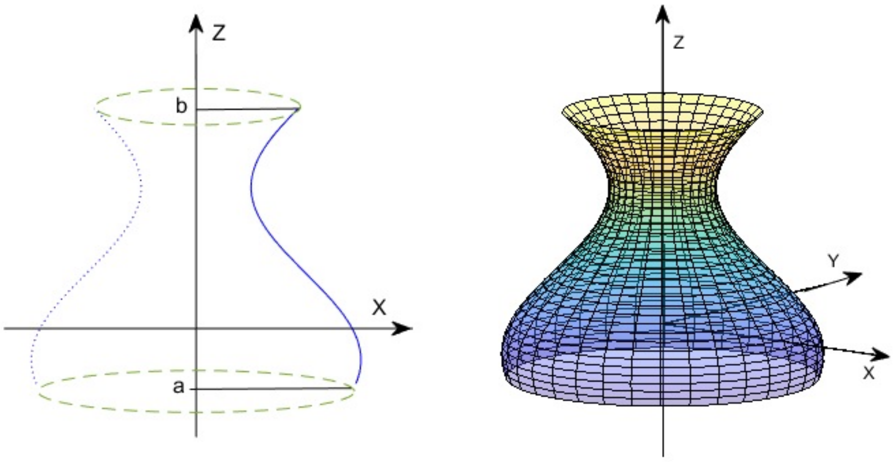
$r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, \infty)$ – ***współrzędne walcowe***,

to jakobian $\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$

Wspólrzędne walcowe są zazwyczaj wykorzystywane do obliczania całek po zbiorach, które są bryłami obrotowymi lub są fragmentami takich brył.

### Objętość brył obrotowych

Rozważmy bryłę $B$ której powierzchnia boczna powstaje w wyniku obrotu wokół osi $OZ$ wykresu funkcji $x = f(z)$ dla $z \in [a, b]$.

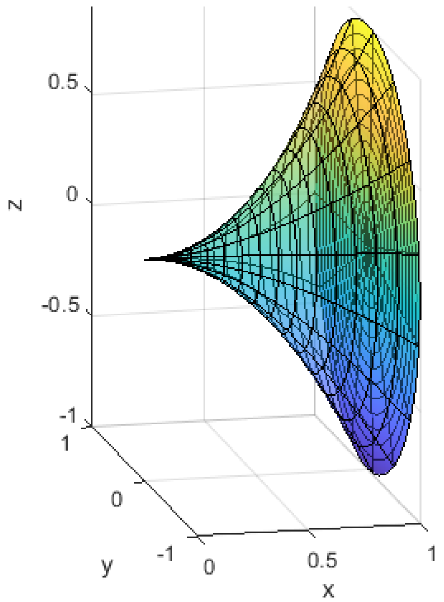



Do obliczenia objętości bryły wykorzystamy zamianę zmiennych na współrzędne walcowe:
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$, $J = r$.
Dla bryły obrotowej określonej powyżej mamy: $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [a, b]$, $r \in [0, f(z)]$.

$$V = \iiint\limits_{\overline{B}} dxdydz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_a^b\Big(\int_0^{f(z)} rdr\Big)dz\Big)d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_a^b\Big(\int_0^{f(z)} rdr\Big)dz =$$

$$= 2\pi \cdot \int_a^b \Big(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{f(z)}\Big)dz = 2\pi \cdot \int_a^b \frac{[f(z)]^2}{2}dz = \pi \cdot \int_a^b [f(z)]^2 dz$$

***Przykład 6.*** Obliczyć objętość bryły $\overline{T}$ powstałej przez obrót wokół osi $OX$ wykresu funkcji $f(x) = x^2$ dla $x \in [0, 1]$.




Objętość bryły obliczymy jako całkę $|\overline{T}| = \iiint\limits_{\overline{T}} dxdydz$

Do obliczenia całki wykorzystamy wspólrzędne walcowe, gdzie oś obrotu pokrywa się z osią $OX$ ($r$ to odległość punktu $(x, y, z)$ od osi $OX$).

$x = x, \quad y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta, \qquad J = r.$

Dla bryły obrotowej określonej w przykładzie mamy: $\theta \in [0, 2\pi],\ x \in [0, 1],\ r \in [0, x^2]$.

$$|\overline{T}| = \iiint\limits_{\overline{T}} dxdydz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1\Big(\int_0^{x^2} rdr\Big)dx\Big)d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1\Big(\int_0^{x^2} rdr\Big)dx = 2\pi \cdot \int_0^1 \Big(\frac{r^2}{2}\Big|_0^{x^2}\Big)dx =$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^1 \frac{x^4}{2}dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

### Zastosowanie w fizyce

Jeśli $\varrho(x, y, z)$ jest gęstością objętościową masy bryły $\overline{B}$,

to całka $\quad M = \iiint\limits_{\overline{B}} \varrho(x, y, z)dxdydz \quad$ wyraża masę tej bryły.

Całki $MS_{xy} = \iiint\limits_{\overline{B}} z\varrho(x, y, z)dxdydz$, $MS_{xz} = \iiint\limits_{\overline{B}} y\varrho(x, y, z)dxdydz$ i $MS_{yz} = \iiint\limits_{\overline{B}} x\varrho(x, y, z)dxdydz$

przedstawiają momenty statyczne bryły $\overline{B}$ względem płaszczyzn układu współrzędnych.

Współrzędne środka masy bryły $\overline{B}$ o gęstości $\varrho(x, y, z)$ wyrażają się następująco:

$$(x_C, y_C, z_C) = \Big(\frac{MS_{yz}}{M}, \frac{MS_{xz}}{M}, \frac{MS_{xy}}{M}\Big).$$