Liniowa geometria analityczna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Uwaga: Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ będziemy interpretować na trzy sposoby, jako:

1. zbiór wszystkich punktów $P = (x, y, z)$.

W tej interpretacji elementy przestrzeni nazywamy punktami i oznaczamy A,B, C, P,Q ...
Liczby x, y, z nazywamy współrzędnymi punktu $P = (x, y, z)$.

2. zbiór wszystkich **wektorów zaczepionych** $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$ w przestrzeni.

Wektory te mają wspólny początek $O = (0, 0, 0)$, a końce w punktach $P = (x, y, z)$.
Wektor $\overrightarrow{OP}$ nazywamy wektorem wodzącym punktu P.
W tej interpretacji elementy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywamy wektorami i oznaczamy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \ldots$.
Liczby x, y, z nazywamy współrzędnymi wektora i piszemy $\mathbf{u} = (x, y, z)$.
Stosujemy oznaczenia $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ oraz $-\mathbf{u} = (-x, -y, -z)$

3. zbiór wszystkich **wektorów swobodnych** w przestrzeni.

Przez wektor swobodny $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ rozumiemy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych w różnych punktach, które mają ten sam kierunek, zwrot i długość co wektor o współrzędnych (x, y, z) zaczepiony w punkcie $(0, 0, 0)$. Formalnie wektory swobodne to klasy abstrakcji w zbiorze wszystkich wektorów zaczepionych wyznaczone przez relację:
$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z) = (D_x - C_x, D_y - C_y, D_z - C_z)$,
gdzie np. A_x to współrzędna x punktu A.

Elementy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ możemy dodawać i mnożyć przez liczby.

Oznaczenia: $|\overrightarrow{u}|$ **długość wektora** $\overrightarrow{u}$,
$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$, gdzie $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$.

Def. Wektor $\overrightarrow{u}$ nazywamy **wersorem**, gdy $|\overrightarrow{u}| = 1$.

Def. **Kąt między niezerowymi wektorami swobodnymi** $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$
jest to kąt między wektorami $\overrightarrow{OP_1}$ i $\overrightarrow{OP_2}$ zaczepionymi w punkcie $O = (0, 0, 0)$ reprezentującymi te wektory swobodne. Oznaczenie: $\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Def. **Iloczyn skalarny** niezerowych wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$
jest to liczba rzeczywista ozn. $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}$ równa: $|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos \measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Jeśli $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ lub $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, to przyjmujemy $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0$

Można spotkać inne oznaczenia iloczynu skalarnego: $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $\langle\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}\rangle$.

Własności iloczynu skalarnego

1. $|\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}| \leqslant |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|$
2. $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{u}$
3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \circ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \circ \overrightarrow{v}$
4. $(\lambda \cdot \overrightarrow{u}) \circ \overrightarrow{v} = \lambda \cdot (\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v})$
5. $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{u} \geqslant 0, \quad \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
6. jeśli $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z), \quad \overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z), \quad$ to $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$

Przykład 1. Rozważmy dwa wektory: $\overrightarrow{u} = (1, 0, -3)$ $\overrightarrow{v} = (2, -1, 1)$.

Ich iloczyn skalarny $\quad \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 = -1$

Długości tych wektorów to $|\overrightarrow{u}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}, \quad |\overrightarrow{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

Mając powyższe dane, możemy obliczyć kosinus kąta miedzy wektorami korzystając z równości

$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

$\cos\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{10}\sqrt{6}} = \dfrac{-1}{\sqrt{60}}$

Wartość kosinusa jest ujemna, więc kąt jest rozwarty.

Def. Mówimy, że wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ są ortogonalne, jeśli $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0$.

Uwaga: Jeśli $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, to $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ są ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy są prostopadłe.

Przykład 2. Niech $\overrightarrow{u} = (1, 0, -3)$ $\overrightarrow{v} = (2, -1, 1)$, $\overrightarrow{w} = (6, 4, 2)$.

Sprawdzimy, czy wśród tych wektorów są wektory prostopadłe.

$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = -1 \neq 0$ – te wektory nie są prostopadłe.

$\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{w} = 1 \cdot 6 + 0 + (-3) \cdot 2 = 0$ – te wektory są prostopadłe.

$\overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{w} = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 10$ – te wektory nie są prostopadłe.

Def. **Iloczynem wektorowym** niezerowych wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{w}$ taki, że

1. $|\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
2. $\overrightarrow{w}$ jest ortogonalny do $\overrightarrow{u}$ i do $\overrightarrow{v}$

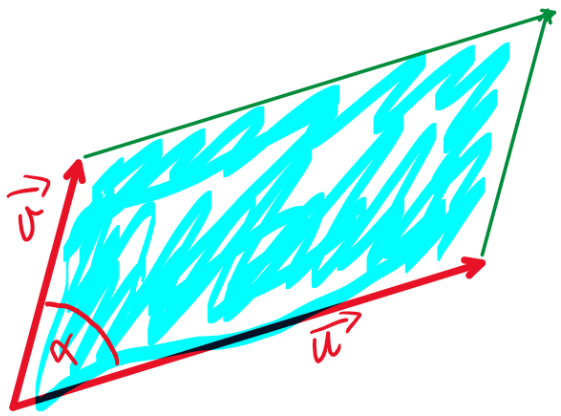
3. jeżeli $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, to $\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} > 0,$

   to znaczy układ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ ma orientację zgodną z ukladem $OXYZ$.

4. jeśli $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ lub $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, to przyjmuje się $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

Oznaczenie: $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ – iloczyn wektorowy.

Uwaga: Liczba $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}|$ to pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$.



Własności iloczynu wektorowego

1. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ dla $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ i $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ $\Leftrightarrow$ wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ są ***kolinearne***(*współliniowe*)
   (tzn. $\exists \lambda \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{u} = \lambda \cdot \overrightarrow{v}$)

2. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$

3. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \times \overrightarrow{v}$

4. $(\lambda \cdot \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \lambda \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$

5. jeśli $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z)$, to

   $$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \left(\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix},$$

   gdzie $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$ – wersory osi (odpowiednio) OX, OY, OZ.

Przykład 3. Wyznaczymy iloczyn wektorowy wektorów $\overrightarrow{u} = (1, 0, -3)$ i $\overrightarrow{v} = (2, -1, 1)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}0 & -3\\ -1 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=$$
$$=-3\vec{i}-7\vec{j}-\vec{k}=(-3,-7,-1)$$

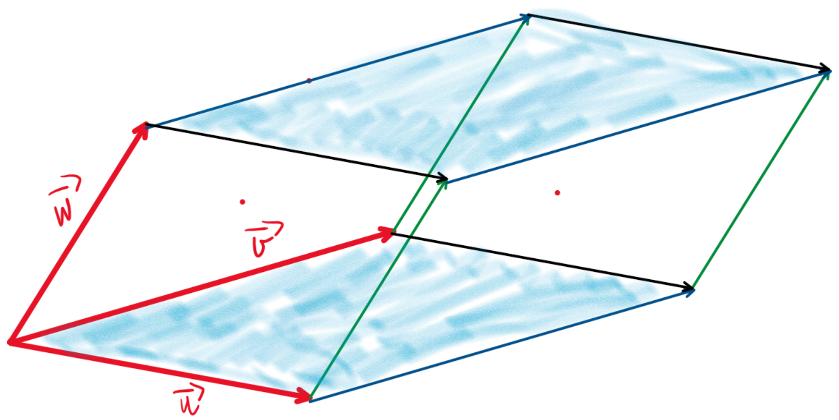
Długość tego wektora: $|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{(-3)^2+(-7)^2+(-1)^2}=\sqrt{59}$ to pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$ i jest to liczba równa $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$.

Możemy wyznaczyć sinus kąta między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$.
$\sin\measuredangle(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\dfrac{\sqrt{59}}{\sqrt{10}\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{59}}{\sqrt{60}}$

Def. **Iloczynem mieszanym** wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nazywamy liczbę

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\circ\vec{w}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}.$$

Uwaga: Liczba $|(\vec{u}\times\vec{v})\circ\vec{w}|$ to objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.



Przykład 4. Obliczymy iloczyn mieszany wektorów $\vec{u}=(1,0,-3)$, $\vec{v}=(2,-1,1)$, $\vec{w}=(6,4,2)$.

$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\circ\vec{w}=(-3,-7,-1)\circ(6,4,2)=-18-28-2=-48$

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & -1 & 1\\ 6 & 4 & 2\end{vmatrix}=-48$$

Objętość równoległościanu rozpiętego prze te trzy wektory jest równa $V=|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|=48$.

Możemy obliczyć np. wysokość tego równoległościanu prostopadłą do równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, korzystając z równości $V=48=P_p\cdot h=|\vec{u}\times\vec{v}|\cdot h=\sqrt{59}\cdot h$.

$h = \dfrac{48}{\sqrt{59}}$ jest to też odległość między odpowiednimi ścianami równoległymi.

Płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$

Równanie ogólne płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$, gdzie $A^2 + B^2 + C^2 > 0$
i $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ – **wektor normalny płaszczyzny** (wektor prostopadły do płaszczyzny, czyli prostopadły do wszystkich niezerowych wektorów tej płaszczyzny).

Przykład 5. Niech π - płaszczyzna określona równaniem

$$\pi: \quad 3x - 4y + 2z - 5 = 0$$

Wtedy wektor normalny tej płaszczyzny to $\overrightarrow{n} = (3, -4, 2)$, a punkt $P_0 = (1, 0, 1) \in \pi$.

Zauważmy, że tę samą płaszczyznę otrzymamy mnożąc równanie przez liczbę $\lambda \neq 0$, a innym wektorem normalnym tej płaszczyzny będzie $\overrightarrow{n_1} = (3c, -4c, 2c)$, gdzie c może być dowolną liczbą niezerową.

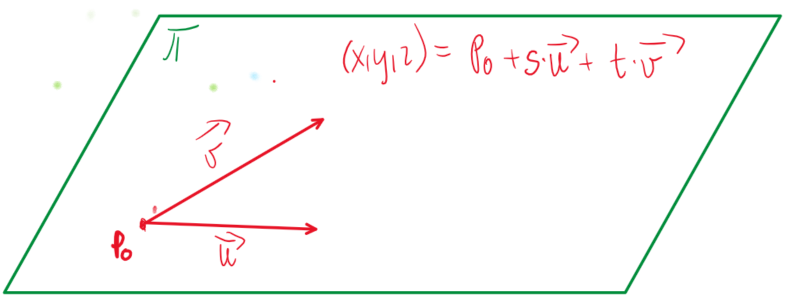
Równanie normalne płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i prostopadłej do wektora $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ ma postać:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Przykład 6. Równanie normalne płaszczyzny π z przykładu 5. wyznaczymy wstawiając punkt $P_0 = (1, 0, 1)$ i wektor normalny $\overrightarrow{n} = (3, -4, 2)$.

$$\pi: \quad 3(x - 1) - 4y + 2(z - 1) = 0$$

Równanie parametryczne płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
i rozpiętej na dwóch niewspółliniowych wektorach $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$ i $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z)$



$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + su_x + tv_x \\ y = y_0 + su_y + tv_y \\ z = z_0 + su_z + tv_z \end{cases}, \text{ gdzie } s,t \in \mathbb{R}. \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Przykład 7.

Wyznaczymy równanie parametryczne płaszczyzny π z przykładu 5.

Należy w tym celu wyznaczyć zbiór rozwiązań równania definiującego płaszczyznę π.

Równanie $3x - 4y + 2z = 5$

Wyznaczymy z przy pomocy pozostałych zmiennych.

$z = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x + 2y$

$$\pi: \begin{cases} x = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ y = 0 + 0 \cdot x + 1 \cdot y \\ z = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cdot x + 2 \cdot y \end{cases}, \text{ gdzie } x,y \in \mathbb{R}. \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} + x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Równoważnie można zapisać $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ gdzie $s,t \in \mathbb{R}$.

Stąd dostaniemy $(x,y,z) = (0,0,\frac{5}{2}) + s(2,0,-3) + t(0,1,2) = P_1 + s \cdot \overrightarrow{u_1} + t \cdot \overrightarrow{u_2}$,

gdzie $\overrightarrow{u_1} = (2,0,-3)$, $\overrightarrow{u_2} = (0,1,2)$ - wektory rozpinające płaszczyznę π,

a $P_1 = (0,0,\frac{5}{2})$ - punkt należący do π.

Równanie odcinkowe płaszczyzny π przecinającej osie OX, OY, OZ w punktach odpowiednio $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ ma postać:

$$\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

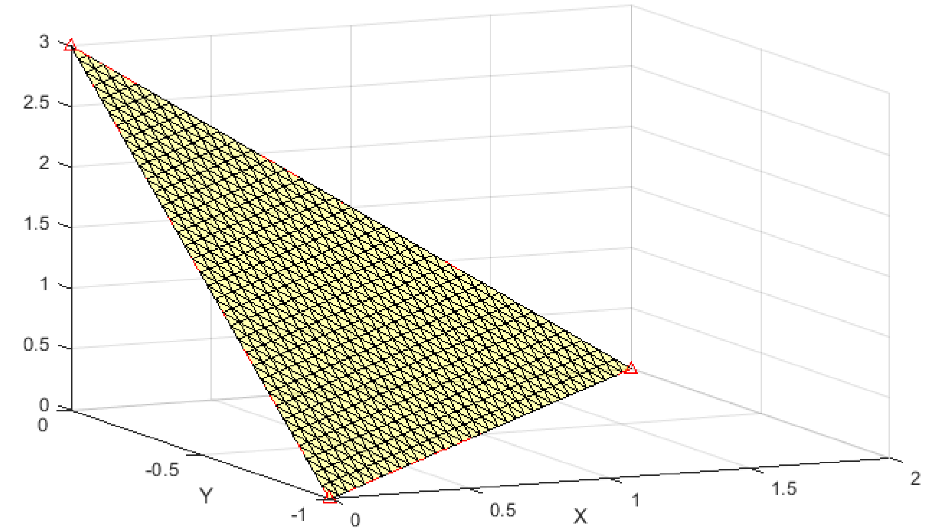
Przykład 8. Zapiszemy równanie odcinkowe płaszczyzny $\pi: \quad 3x - 6y + 2z - 6 = 0$.

Aby wyznaczyć wartość a, wstawimy do równania $y = 0, z = 0$ i dostaniemy $a = 2$;

aby wyznaczyć wartość b, wstawimy do równania $x = 0, z = 0$ i dostaniemy $b = -1$;

Aby wyznaczyć wartość c, wstawimy do równania $x = 0, y = 0$ i dostaniemy $c = 3$;

Stąd równanie odcinkowe tej płaszczyzny to: $\pi: \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-1} + \dfrac{z}{3} = 1$.



Def. **Rzutem prostokątnym punktu** P **na płaszczyznę** π nazywamy punkt P' tej płaszczyzny spełniający warunek $\overrightarrow{PP'} \perp \pi$. **Odległością punktu** P **od płaszczyzny** π nazywamy długość wektora $\overrightarrow{PP'}$, jeśli P' jest rzutem prostokątnym P na π.

Odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ **od płaszczyzny** $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ wyraża się wzorem:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Przykład 9. Wyznaczymy odległość punktu $P_0 = (1, 2, 3)$ od płaszczyzny $\pi : \ 3x - 4y + 2z - 5 = 0$.
$d(P_0, \pi) = \dfrac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{29}}$.

Położenie dwóch płaszczyzn:

Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn π_1 i π_2 o równaniach:

$$\begin{aligned} \pi_1 : &\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 : &\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}$$

badamy korzystając z twierdzenia Krocneckera-Capellego:

1. π_1 i π_2 są równoległe (i rożne), gdy $r \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} = 1$ i $r \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} = 2$

2. π_1 i π_2 pokrywają się, gdy $r \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} = 1$

3. π_1 i π_2 są nierównoległe, gdy $r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} = 2.$

Wtedy przecinają się wzdłuż prostej

$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ – **równanie krawędziowe prostej**.

Odległość płaszczyzn równoległych π_1 i π_2 o równaniach

$\pi_1:\ Ax + By + Cz + D_1 = 0$ i $\pi_2:\ Ax + By + Cz + D_2 = 0$ wyraża się wzorem

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Przykład 10. Zbadamy wzajemne położenie płaszczyzn

$\pi_1:\ 3x-4y+2z-5 = 0,\ \ \pi_2:\ 6x-8y+4z+3 = 0,\ \ \pi_3:\ 6x-8y+4z-10 = 0,\ \ \pi_4: x+2y-3z+2 = 0.$

a) Para płaszczyzn $\pi_1:\ 3x - 4y + 2z - 5 = 0$ i $\pi_2:\ 6x - 8y + 4z + 3 = 0$

$r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 6 & -8 & 4 \end{bmatrix} = 1$, (bo $w_2 = 2 \cdot w_1$)

$r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & -5 \\ 6 & -8 & 4 & 3 \end{bmatrix} = 2$, (bo minor $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$)

Wniosek: Płaszczyzny π_1 i π_2 są równoległe. Można wyznaczyć odległość między nimi.

Aby skorzystać ze wzoru na odległość w równaniach ogólnych obu płaszczyzn muszą być te same współczynniki A, B, C.

$\pi_1:\ \ 3x - 4y + 2z - 5 = 0 \iff 6x - 8y + 4z - 10 = 0$

Mamy więc $d(\pi_1, \pi_2) = \dfrac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \dfrac{|-10-3|}{\sqrt{6^2 + 8^2 + 4^2}} = \dfrac{13}{\sqrt{116}}.$

b) Para płaszczyzn $\pi_1:\ 3x - 4y + 2z - 5 = 0$ i $\pi_3:\ 6x - 8y + 4z - 10 = 0$

$r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & -5 \\ 6 & -8 & 4 & -10 \end{bmatrix} = 1$, bo $w_2 = 2 \cdot w_1$.

Wniosek: Płaszczyzny π_1 i π_3 się pokrywają.

c) Para płaszczyzn $\pi_1:\ 3x - 4y + 2z - 5 = 0$ i $\pi_4:\ x + 2y - 3z + 2 = 0$

$r\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = 2$, bo minor $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Wniosek: Płaszczyzny π_1 i π_4 przecinają się wzdłuż prostej $l: \begin{cases} 3x-4y+2z &= 5 \\ x+2y-3z &= -2 \end{cases}$

Możemy wyznaczyć tę prostą rozwiązując układ równań lub wskazując punkt P_0 należący do tej prostej oraz podając wektor wyznaczający kierunek tej prostej.

Zauważmy, że punkt $P_0 = (1,0,1) \in l$ (rozwiązanie szczególne układu)

Wektory normalne $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_4}$ podanych płaszczyzn generują płaszczyznę prostopadłą do prostej l.

Za wektor kierunkowy $\overrightarrow{w}$ prostej l możemy przyjąć iloczyn wektorowy wektorów $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_4}$.

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_4} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (8, 11, 10)$$

Wektor $\overrightarrow{w}$ jest prostopadły i do wektora $\overrightarrow{n_1}$, i do wektora $\overrightarrow{n_4}$. ($\overrightarrow{w} \circ \overrightarrow{n_1} = 0$, $\overrightarrow{w} \circ \overrightarrow{n_4} = 0$).

Punkty P należące do prostej l możemy opisać następująco:

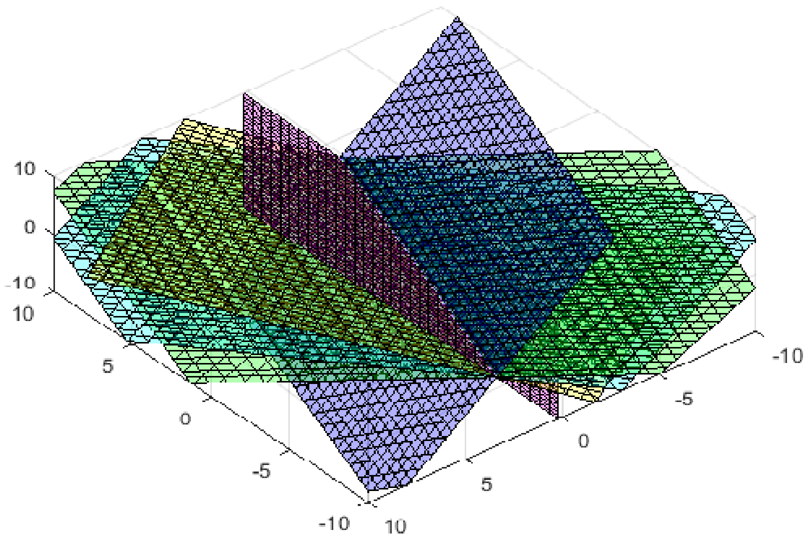
$P = (x,y,z) = P_0 + t \cdot \overrightarrow{w} = (1,0,1) + t(8,11,10) = (1+8t, 11t, 1+10t)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Pęk płaszczyzn:

Dana jest prosta $l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Przez prostą l przechodzą inne płaszczyzny (pęk płaszczyzn). Możne je opisać równaniem:

$$\lambda \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \text{ gdzie } \lambda^2 + \mu^2 > 0.$$



Przykład 11. Wyznaczymy pęk płaszczyzn przechodzących przez prostą l z przykładu 10c.

Dla prostej l : $\begin{cases} 3x - 4y + 2z - 5 &= 0 \\ x + 2y - 3z + 2 &= 0 \end{cases}$ równanie pęku prostych będzie miało postać

$$\lambda \cdot (3x - 4y + 2z - 5) + \mu \cdot (x + 2y - 3z + 2) = 0, \text{ gdzie } \lambda^2 + \mu^2 > 0.$$

Wstawiając do równania różne wartości λ i μ dostaniemy różne płaszczyzny zawierające prostą l.

Prosta w $\mathbb{R}^3$

Równanie parametryczne prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ma postać:

$$l : \begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ z = z_0 + tv_z \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}. \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Wektor $\overrightarrow{v}$ nazywamy **wektorem kierunkowym** prostej l.

Przykład 12. Na podstawie obliczeń z przykladzu 10c możemy napisać równanie parametryczne prostej l:

$$l : \begin{cases} x = 1 + 8t \\ y = 0 + 11t \\ z = 1 + 10t \end{cases}, \text{ gdzie } t \in \mathbb{R}. \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Uwaga: Wektor kierunkowy prostej określonej równaniem krawędziowym ma postać $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$, gdzie $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ są wektorami normalnymi odpowiednio płaszczyzn π_1 i π_2.

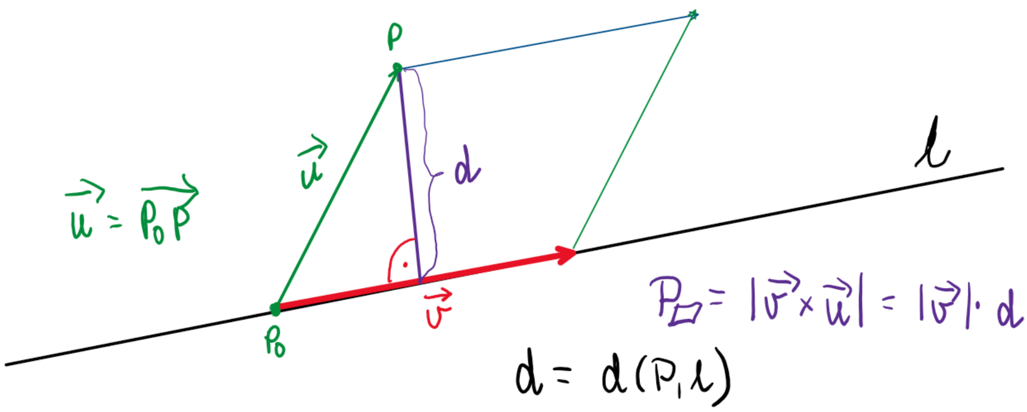
Uwaga: Wektor normalny płaszczyzny określonej równaniem parametrycznym

$(x, y, z) = P_0 + t \cdot \overrightarrow{u} + s \cdot \overrightarrow{v}$

ma postać $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$, gdzie $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{u}$ to wektory rozpinające tę płaszczyznę.

Def. **Rzutem prostokątnym punktu P na prostą** l nazywamy punkt P' tej prostej spełniający warunek $\overrightarrow{PP'} \perp l$.

Odległością punktu P od prostej l nazywamy długość wektora $\overrightarrow{PP'}$, jeśli P' jest rzutem prostokątnym P na l.



Odległość punktu P od prostej l przechodzącej przez punkt P_0 i wektorze kierunkowym $\vec{v}$ wyraża się wzorem:

$$d(P,l) = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}.$$

Położenie dwóch prostych

Dwie proste: l_1 przechodząca przez punkt P_1 i wektorze kierunkowym $\vec{v}$ oraz l_2 przechodząca przez punkt P_2 i wektorze kierunkowym $\vec{u}$

- są równoległe, gdy wektory $\vec{v}$ i $\vec{u}$ są równoległe, czyli $\exists \lambda \in \mathbb{R}\ \vec{u} = \lambda \cdot \vec{v}$.
  Odległość między takimi prostymi to odległość dowolnego punktu należącego do jednej prostej od drugiej prostej.
- przecinają się, gdy układ wektorów $(\vec{v}, \vec{u}, \overrightarrow{P_1P_2})$ jest liniowo zależny, czyli gdy iloczyn mieszany $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{P_1P_2}) = 0$.
- są skośne, gdy układ wektorów $(\vec{v}, \vec{u}, \overrightarrow{P_1P_2})$ jest liniowo niezależny, czyli gdy iloczyn mieszany $(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{P_1P_2}) \neq 0$.
  Wtedy istnieją płaszczyzny równoległe π_1 i π_2 zawierające te proste.
  Odległość między takimi prostymi, to odległość między płaszczyznami π_1 i π_2, która wyraża się wzorem:
  $$d(l_1,l_2) = \frac{|(\vec{v}, \vec{u}, \overrightarrow{P_1P_2})|}{|\vec{v} \times \vec{u}|}.$$

Przestrzeń euklidesowa

Pojęcie iloczynu skalarnego można wprowadzić w różnych przestrzeniach liniowych, nie tylko w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Def. W przestrzeni V nad $\mathbb{R}$ określony jest **iloczyn skalarny**, jeśli każdej parze wektorów $u, v \in V$ przyporządkowana jest liczba rzeczywista, ozn. $u \circ v$, przy czym spełnione są warunki:

1. $u \circ v = v \circ u, \quad \forall u, v \in V$
2. $(u + w) \circ v = u \circ v + w \circ v, \quad \forall u, v, w \in V$
3. $(\lambda \cdot u) \circ v = \lambda \cdot (u \circ v), \quad \forall u, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$
4. $u \circ u \geqslant 0, \quad u \circ u = 0 \Leftrightarrow u = \mathbf{0}$

Def. Przestrzeń liniową V nad ciałem $\mathbb{R}$ nazywamy **przestrzenią euklidesową**, jeśli jest w niej określony iloczyn skalarny.

Uwaga: W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ iloczynem skalarnym jest w szczególności funkcja (tzw. standardowy iloczyn skalarny), która parze wektorów $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ przyporządkowuje liczbę,

$$X \circ Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Def. Wektory u i v są **ortogonalne** wtedy i tylko wtedy, gdy $u \circ v = 0$.

Przykład 13. W przestrzeni liniowej $\mathcal{C}_{[a,b]}$ rzeczywistych funkcji ciągłych na przedziale domkniętym $[a, b]$ iloczynem skalarnym funkcji f i g jest np.

$$f \circ g = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

W szczególności w przestrzeni $\mathcal{C}_{[0,2\pi]}$ będzie:

$\sin x \circ \sin x = \int_0^{2\pi} \sin x \sin x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx = \pi$

$\cos x \circ \cos x = \int_0^{2\pi} \cos x \cos x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)dx = \pi$

$\sin x \circ \cos x = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2x dx = 0$

Funkcje $\sin x$ i $\cos x$ są ortogonalne w przestrzeni $\mathcal{C}_{[0,2\pi]}$ z iloczynem skalarnym określonym jak wyżej. Pojęcie takiej właśnie ortogonalności jest używane w teorii szeregów trygonometrycznych Fouriera.

Def. Długość (norma) wektora u przestrzeni euklidesowej V wyraża się wzorem

$$\|u\| = \sqrt{u \circ u}.$$

Własności normy

Dla dowolnych $u, v \in V$ zachodzi:

1. $|u \circ v| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$ (nierówność Cauchy'ego-Buniakowskiego)
2. $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ (nierówność trójkąta)
3. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad u \circ v = 0$ (tw. Pitagorasa dla przestrzeni euklidesowych)

Niech V – n-wymiarowa przestrzeń euklidesowa.

Def. Układ niezerowych wektorów $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ przestrzeni V nazywamy **bazą ortogonalną**, jeśli $v_i \circ v_j = 0$ dla dowolnych $i \neq j$. Jeśli dodatkowo $\|v_i\| = 1$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$, to bazę ortogonalną nazywamy **bazą ortonormalną**.

Uwaga: Każda baza ortogonalna przestrzeni V jest bazą tej przestrzeni.

Uwaga: W każdej przestrzeni euklidesowej skończonego wymiaru istnieje baza ortogonalna (ortonormalna).

Metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta

Niech $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ - baza przestrzeni n-wymiarowej V.
Celem ortogonalizacji jest uzyskanie bazy ortogonalnej $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ przestrzeni V.
Proces ortogonalizacji przebiega następująco:

- Przyjmujemy $u_1 := v_1$,
- $u_2 := v_2 - \alpha \cdot u_1$, przy czym współczynnik α dobieramy tak, by $u_1 \circ u_2 = 0$.
  Otrzymujemy $\alpha = \dfrac{v_2 \circ u_1}{u_1 \circ u_1}$.
- Jeżeli $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$ są już wyznaczone, to u_k wyznaczamy następująco:
  $u_k := v_k - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \ldots - \alpha_{k-1} u_{k-1}$
  i ma zachodzić $u_k \circ u_i = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, k-1$.
  Otrzymujemy współczynniki $\alpha_i = \dfrac{v_k \circ u_i}{u_i \circ u_i}$ dla $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Wyjaśnienie:

I krok - wybieramy pierwszy wektor do bazy ortogonalnej $u_1 := v_1$;

II krok - znajdujemy rzut ortogonalny kolejnego wektora v_2 na podprzestrzeń wyznaczoną przez wektor u_1. Tym rzutem będzie wektor $\alpha \cdot u_1$.

Wektor $v_2 = \alpha \cdot u_1 + u_2$ jest sumą dwóch ortogonalnych wektorów $\alpha \cdot u_1$ i u_2.

Stąd $u_2 = v_2 - \alpha \cdot u_1$ i ma być $u_2 \circ u_1 = 0$, czyli $(v_2 - \alpha \cdot u_1) \circ u_1 = v_2 \circ u_1 - \alpha u_1 \circ \cdot u_1 = 0$.

Z ostatniej równości wyznaczamy $\alpha = \dfrac{v_2 \circ u_1}{u_1 \circ u_1}$.

Krok k - znajdujemy rzut ortogonalny wektora v_k na podprzestrzeń wyznaczoną przez wektory ortogonalne $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$.

Tym rzutem będzie wektor $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_{k-1} u_{k-1}$, zaś $u_k := v_k - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 - \ldots - \alpha_{k-1} u_{k-1}$.

Szukany wektor u_k ma być ortogonalny do wszystkich wektorów u_i wyznaczonych wcześniej.

Z warunków ortogonalności dostaniemy wzory na współczynniki α_k.

Przykład 14. Przeprowadzimy ortogonalizację bazy $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$,

gdzie $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 1, -1)$.

Przyjmujemy, że pierwszy wektor bazy ortogonalnej to $u_1 = v_1 = (1, 1, 1)$.

W kolejnym kroku potrzebujemy iloczyny skalarne:

$u_1 \circ u_1 = (1, 1, 1) \circ (1, 1, 1) = 3, \quad v_2 \circ u_1 = (1, -1, 1) \circ (1, 1, 1) = 1$

Kolejnym wektorem bazy ortogonalnej będzie

$$u_2 = v_2 - \alpha u_1 = v_2 - \frac{v_2 \circ u_1}{u_1 \circ u_1} u_1 = v_2 - \tfrac{1}{3} u_1 = (1, -1, 1) - \tfrac{1}{3}(1, 1, 1) = (\tfrac{2}{3}, -\tfrac{4}{3}, \tfrac{2}{3}).$$

W kolejnym kroku potrzebujemy jeszcze iloczyny skalarne:

$u_2 \circ u_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) \circ (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) = \frac{8}{3}, \quad v_3 \circ u_1 = (1, 1, -1) \circ (1, 1, 1) = 1,$

$v_3 \circ u_2 = (1, 1, -1) \circ (\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}.$

Trzecim wektorem bazy ortogonalnej będzie

$$u_3 = v_3 - \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 = v_3 - \frac{v_3 \circ u_1}{u_1 \circ u_1} u_1 - \frac{v_3 \circ u_2}{u_2 \circ u_2} u_2 = v_3 - \tfrac{1}{3} u_1 + \tfrac{1}{2} u_2 =$$
$$= (1, 1, -1) - \tfrac{1}{3}(1, 1, 1) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{4}{3}, \tfrac{2}{3}) = (1, 0, -1).$$

Układ wektorów $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ jest bazą ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Aby uzyskać ortonormalną bazę tej przestrzeni wystarczy każdy wektor bazy $\mathcal{U}$ podzielić przez jego normę (długość).

Rzut ortogonalny wektora na podprzestrzeń

Niech V - przestrzeń liniowa wymiaru n nad $\mathbb{R}$,
W - m wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni V.

Uwaga: Jeśli wektor v jest ortogonalny do każdego z wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k$, to jest ortogonalny do dowolnej kombinacji liniowej tych wektorów.

Def. Wektor $v \in V$ jest **ortogonalny do podprzestrzeni** W, jeśli jest ortogonalny do każdego wektora tej podprzestrzeni.

Uwaga: Wektor v jest ortogonalny do podprzestrzeni $W \iff$ jest ortogonalny do każdego wektora bazy tej podprzestrzeni.

Zagadnienie: Rzut ortogonalny wektora v na podprzestrzeń W jest to taki wektor $u \in W$, że wektor $v - u$ jest ortogonalny do W, czyli $\forall w \in W \quad (v-u) \circ w = 0$.

Uwaga: Jeżeli u jest rzutem ortogonalnym v na W, to dla każdego wektora $w \in W, w \neq u$ zachodzi $\|v-u\| < \|v-w\|$, czyli wektor u jest wektorem najbliższym do v spośród wszystkich wektorów przestrzeni W.

Wyznaczanie rzutu ortogonalnego wektora v na podprzestrzeń W

Niech $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ – baza przestrzeni W,
$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m$ – rzut ortogonalny v na W.
Współczynniki a_i wyznaczymy z warunku $(v-u) \circ v_i = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$.
Dostajemy m równań $u \circ v_i = v \circ v_i$.
Rozwiązujemy układ m równań z m niewiadomymi:

$$\begin{cases} a_1(v_1 \circ v_1) + a_2(v_2 \circ v_1) + \ldots + a_m(v_m \circ v_1) = v \circ v_1 \\ a_1(v_1 \circ v_2) + a_2(v_2 \circ v_2) + \ldots + a_m(v_m \circ v_2) = v \circ v_2 \\ \vdots \\ a_1(v_1 \circ v_m) + a_2(v_2 \circ v_m) + \ldots + a_m(v_m \circ v_m) = v \circ v_m \end{cases}$$

Ma on dokładnie jedno rozwiązanie (jest ukladem Cramera), gdy

$$\begin{vmatrix} (v_1 \circ v_1) & (v_2 \circ v_1) & \ldots & (v_m \circ v_1) \\ (v_1 \circ v_2) & (v_2 \circ v_2) & \ldots & (v_m \circ v_2) \\ \vdots & & & \vdots \\ (v_1 \circ v_2) & (v_2 \circ v_2) & \ldots & (v_m \circ v_m) \end{vmatrix} \neq 0$$

(wyznacznik Grama dla wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_m$)

Uwaga: W przypadku gdy W jest 1-wymiarową przestrzenią $W = Lin\{v_1\}$, rzut wektora v na W nazywamy rzutem wektora v na wektor v_1 i jest to wektor $u = \dfrac{v \circ v_1}{v_1 \circ v_1} \cdot v_1$.

Przykład 15. Wyznaczymy rzut wektora $v = (1,1,1)$ na podprzestrzeń $W = Lin\{(1,-1,1),(1,1,-1)\}$.

Przyjmijmy oznaczenia: $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (1,1,-1)$.

Rzutem wektora v na podprzestrzeń W będzie pewien wektor $u = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$.

Należy wyznaczyć liczby a i b.

Wektor v jest sumą dwóch wektorów prostopadłych:

u należącego do W oraz $v - u$ prostopadłego do W.

Z ortogonalności wektora $v - u$ i płaszczyzny W wynika, że wektor $v - u$ jest ortogonalny do wektora v_1 oraz v_2.

Oznacza to równości: $\begin{cases} (v-u) \circ v_1 = 0 \\ (v-u) \circ v_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u \circ v_1 = v \circ v_1 \\ u \circ v_2 = v \circ v_2 \end{cases}$

Dalej wstawiamy do układu równań $u = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$ i dostajemy

$$\begin{cases} (a \cdot v_1 + b \cdot v_2) \circ v_1 = v \circ v_1 \\ (a \cdot v_1 + b \cdot v_2) \circ v_2 = v \circ v_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a \cdot v_1 \circ v_1 + b \cdot v_2 \circ v_1 = v \circ v_1 \\ a \cdot v_1 \circ v_2 + b \cdot v_2 \circ v_2 = v \circ v_2 \end{cases}$$

Obliczamy potrzebne iloczyny skalarne

$\circ$	$v=(1,1,1)$	$v_1=(1,-1,1)$	$v_2=(1,1,-1)$
$v=(1,1,1)$	3	1	1
$v_1=(1,-1,1)$	1	3	-1
$v_2=(1,1,-1)$	1	-1	3

i dostajemy układ równań liniowych z niewiadomymi a, b.

$$\begin{cases} 3a - b = 1 \\ -a + 3b = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Rzut wektora v na podprzestrzeń W to $u = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1) + \frac{1}{2}(1,1,-1) = (1,0,0)$.

Metoda najmniejszych kwadratów

Dany jest sprzeczny układ równań:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Szukamy przybliżonego rozwiązania tego układu *w sensie najmniejszych kwadratów*, czyli szukamy takiego ciągu liczb $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dla którego wyrażenie
$(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1)^2 + (a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n - b_2)^2 + \ldots + (a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n - b_m)^2$
ma najmniejszą wartość.

Szukamy więc takiego wektora $Y = A \cdot X \in Lin\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, gdzie A_i to i-ta kolumna macierzy A danego układu, dla którego norma $\|Y - B\|$ jest najmniejsza, gdzie B - wektor wyrazów wolnych układu.

Wektor Y to rzut ortogonalny wektora B na przestrzeń $Lin\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.
Jakość otrzymanego przybliżenia mierzy się wielkością normy $\|Y - B\|$, którą nazywamy *odchyleniem średniokwadratowym.*

Szczególnym zastosowaniem metody najmniejszych kwadratów jest aproksymacja funkcji rzeczywistej $y = f(x)$ o znanych wartościach dla pewnej skończonej liczby argumentów, funkcją z pewnej rodziny funkcji, np. wielomianem.

Przykład 16.

Dane są wartości funkcji rzeczywistej f: $f(-1) = 1$, $f(0) = 2$, $f(1) = 3$, $f(2) = 5$.

Znaleźć najlepsze przybliżenie funkcji f w sensie odchylenia średniokwadratowego

funkcją liniową $g(x) = ax + b$.

Szukamy przybliżonego rozwiązania układu równań otrzymanego z warunków:

$$\begin{cases} g(-1) &= 1 \\ g(0) &= 2 \\ g(1) &= 3 \\ g(2) &= 5 \end{cases} \quad \text{czyli} \quad \begin{cases} -a + b &= 1 \\ b &= 2 \\ a + b &= 3 \\ 2a + b &= 5 \end{cases}$$

Macierz układu $[A_1, A_2|B] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$

Szukamy wektora Y w postaci kombinacji liniowej $Y = a \cdot A_1 + b \cdot A_2$.

Szukany wektor Y jest rzutem ortogonalnym wektora B na podprzestrzeń $W = Lin\{A_1, A_2\}$.

Należy rozwiązać układ równań $\begin{cases} a \cdot A_1 \circ A_1 + b \cdot A_2 \circ A_1 = B \circ A_1 \\ a \cdot A_1 \circ A_2 + b \cdot A_2 \circ A_2 = B \circ A_2 \end{cases}$

Obliczamy potrzebne iloczyny skalarne

$\circ$	$A_1=(-1,0,1,2)$	$A_2=(1,1,1,1)$	$B=(1,2,3,5)$
$A_1=(-1,0,1,2)$	6	2	12
$A_2=(1,1,1,1)$	2	4	11
$B=(1,2,3,5)$	12	11	

i dostajemy układ równań $\begin{cases} 6a+2b=12 \\ 2a+4b=11 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=\frac{13}{10} \\ b=\frac{21}{10} \end{cases}$

Otrzymujemy więc funkcję $g(x)=\dfrac{13}{10}x+\dfrac{21}{10}$.

Zaś szukany rzut $Y=\frac{13}{10}\cdot A_1+\frac{21}{10}\cdot A_2=\frac{13}{10}\cdot(-1,0,1,2)+\frac{21}{10}\cdot(1,1,1,1)=(\frac{8}{10},\frac{21}{10},\frac{34}{10},\frac{47}{10})$

jest przybliżeniem wektora $B=(1,2,3,5)$.