Przekształcenia liniowe

Def. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$.

Funkcję $\varphi : V \to W$ nazywamy **przekształceniem liniowym** (przestrzeni V w przestrzeń W), jeśli dla dowolnych wektorów $u, v \in V$ i dowolnego $\alpha \in \mathbb{K}$ zachodzą równości

1) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ (przekształcenie jest addytywne),
2) $\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v)$ (przekształcenie jest jednorodne).

Przykład 1.

a) Przekształcenie zerowe

$\varphi : V \to W, \quad \forall v \in V \quad \varphi(v) = \mathbf{0}_W$

każdemu wektorowi dziedziny zostaje przyporządkowany wektor zerowy przestrzeni W.

Sprawdzamy, że taka funkcja jest przekształceniem liniowym:

Niech $u, v \in V, \quad \alpha \in \mathbb{K}$, wtedy

$\varphi(u+v) = \mathbf{0}_W$ oraz $\varphi(u) + \varphi(v) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$;

$\varphi(\alpha v) = \mathbf{0}_W$ oraz $\alpha \cdot \varphi(v) = \alpha \cdot \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$.

b) Przekształcenie identycznościowe $\mathrm{id}_V : V \to V, \quad \forall v \in V \quad \mathrm{id}_V(v) = v$

każdemu wektorowi zostaje przyporządkowany ten sam wektor.

Sprawdzamy, że taka funkcja jest przekształceniem liniowym:

Niech $u, v \in V, \quad \alpha \in \mathbb{K}$, wtedy

$\mathrm{id}_V(u+v) = u+v$ oraz $\mathrm{id}_V(u) + \mathrm{id}_V(v) = u+v$;

$\mathrm{id}_V(\alpha v) = \alpha v$ oraz $(\alpha\mathrm{id}_V)(v) = \alpha v$.

c) Funkcja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \phi((x,y)) = (x+y, x-3y, 2y)$

Sprawdzamy, że taka funkcja jest przekształceniem liniowym:

Niech $u = (x_1, y_1), \ v = (x_2, y_2) \in V, \quad \alpha \in \mathbb{R}$, wtedy

$$\phi(u+v) = \phi((x_1+x_2, y_1+y_2)) = (x_1+x_2+y_1+y_2, x_1+x_2-3(y_1+y_2), 2(y_1+y_2)) =$$
$$= (x_1+y_1, x_1-3y_1, 2y_1) + (x_2+y_2, x_2-3y_2, 2y_2) = \phi((x_1,y_1)) + \phi((x_2,y_2)) = \phi(u) + \phi(v);$$

$$\phi(\alpha u) = \phi((\alpha x_1, \alpha y_1)) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_1 - 3\alpha y_1, 2\alpha y_1) =$$
$$= \alpha(x_1+y_1, x_1-3y_1, 2y_1) = \alpha\phi((x_1,y_1)) = \alpha\phi(u).$$

d) Funkcja $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$, $\phi(w) = (w(1), w'(2))$

Sprawdzamy, że taka funkcja jest przekształceniem liniowym:

Niech $w_1, w_2 \in \mathbb{R}_2[x]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Korzystając z własności wielomianów i liniowości pochodnej możemy zapisać

$\phi(w_1 + w_2) = ((w_1 + w_2)(1), (w_1 + w_2)'(2)) = (w_1(1) + w_2(1), w_1'(2) + w_2'(2)) =$

$= (w_1(1), w_1'(2)) + (w_2(1), w_2'(2)) = \phi(w_1) + \phi(w_2);$

$\phi(\alpha w_1) = ((\alpha w_1)(1), (\alpha w_1)'(2)) = (\alpha \cdot w_1(1), \alpha \cdot w_1'(2)) = \alpha(w_1(1), w_1'(2)) = \alpha\phi(w_1).$

Uwaga: Złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.

Uwaga: Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.
Wówczas $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi równość $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Przykład 2.

Czy jest przekształceniem liniowym funkcja $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\psi((x, y, z)) = (x + y, y - z + 1)$?

Podana funkcja nie jest przekształceniem liniowym, bo $\psi((0, 0, 0)) = (0, 1) \neq (0, 0)$.

Wartość funkcji dla wektora zerowego nie jest wektorem zerowym.

Przykład 3. Przekształcenia geometryczne jako przekształcenia liniowe.

Przekształcenia geometryczne płaszczyzny $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, które są przekształceniami liniowymi to między innymi:

- symetria względem prostej przechodzącej przez punkt $(0, 0)$;
- rzut prostokątny na prostą przechodzącą przez punkt $(0, 0)$;
- obrót o ustalony kąt wokół punktu $(0, 0)$.

Tw. 1. Jeżeli $\dim V = n$ i układ $(v_1, ..., v_n)$ jest bazą przestrzeni V, to dla dowolnej przestrzeni liniowej W i wektorów $w_1, ..., w_n \in W$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$, takie że $\varphi(v_i) = w_i$ dla każdego $i = 1, ..., n$.

Przykład 4. Podać wzór przekształcenia liniowego $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

spełniającego warunki: $\phi((2,1)) = (3,1),\ \phi((3,1)) = (2,1)$.

Wykorzystamy tw. 1. Wprowadzamy oznaczenia: $v_1 = (2,1),\ v_2 = (3,1)$.

Sprawdzimy, czy układ wektorów $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

W tym celu zbadamy wyznacznik macierzy $M_{\mathcal{E}_2}(\mathcal{A})$.

$$M_{\mathcal{E}_2}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

Wyznacznik macierzy układu $\mathcal{A}$ jest niezerowy, więc układ ten jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

W takim razie zgodnie z tw. 1. na podstawie danych wartości przekształcenia dla wektorów bazy, można uzyskać pełną informację o tym przekształceniu, w szczególności jego wzór, czyli $\phi((x,y))$.

Z liniowości ϕ mamy: $\phi((x,y)) = \phi(x(1,0) + y(0,1)) = x \cdot \phi((1,0)) + y \cdot \phi((0,1))$.

Wystarczy wyznaczyć wartości $\phi((1,0))$ i $\phi((0,1))$.

Zauważmy, że $(1,0) = (3,1) - (2,1) = v_2 - v_1$.

Stąd dostaniemy $\phi((1,0)) = \phi(v_2 - v_1) = \phi(v_2) - \phi(v_1) = (2,1) - (3,1) = (-1,0)$.

Należy jeszcze wyznaczyć $\phi((0,1))$.

Mamy $(3,1) = \phi((2,1)) = \phi(2(1,0) + (0,1)) = 2 \cdot \phi((1,0)) + \phi((0,1)) = 2 \cdot (-1,0) + \phi((0,1))$.

Stąd $\phi((0,1)) = (3,1) - 2(-1,0) = (5,1)$.

Ostatecznie uzyskamy wzór: $\phi((x,y)) = x \cdot \phi((1,0)) + y \cdot \phi((0,1)) = x(-1,0) + y(5,1) = (-x+5y, y)$.

Macierz przekształcenia liniowego

Niech V, W będą skończeniewymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$.
$\mathcal{A} = (v_1, ..., v_n)$ - baza przestrzeni V, $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_m)$ - baza przestrzeni W.

Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.
Każdy wektor $\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n)$ można jednoznacznie zapisać w postaci kombinacji liniowej wektorów z bazy $\mathcal{B}$.

$$\varphi(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})_{\mathcal{B}}$$
$$\varphi(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})_{\mathcal{B}}$$
$$\vdots$$
$$\varphi(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})_{\mathcal{B}}$$

Macierz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ nazywamy macierzą przekształcenia φ w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ i oznaczamy symbolem $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$.

Kolumny macierzy $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ są utworzone ze współrzędnych wektorów $\varphi(v_j)$ w bazie $\mathcal{B}$ (dla kolejnych wektorów v_j bazy $\mathcal{A}$).

Przykład 5. Zapiszemy macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ przekształcenia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, gdzie $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ – baza przestrzeni $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (w_1, w_2, w_3)$ – baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i wiadomo, że $\varphi(v_1) = w_1 + w_3$, $\varphi(v_2) = w_2 - 2w_3$.

Macierz przekształcenia będzie miała dwie kolumny, bo tyle jest wektorów w bazie dziedziny przekształcenia.

W pierwszej kolumnie będzie zapisany wektor $\varphi(v_1) = w_1 + w_3 = (1, 0, 1)_{\mathcal{B}}$,

a w drugiej kolumnie wektor $\varphi(v_2) = w_2 - 2w_3 = (0, 1, -2)_{\mathcal{B}}$.

Stąd $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Uwaga: Macierze tego samego przekształcenia $\varphi : V \to W$ mogą być różne - zależą od wyboru bazy przestrzeni V i W, ale zawsze są tego samego wymiaru $m \times n$, gdzie $n = \dim V$, $m = \dim W$.

Przykład 6. Zapiszemy macierze przekształceń z przykładu 1.

a) Macierz przekształcenia zerowego $\varphi : V \to W$ jest macierzą zerową $[0]_{m\times n}$ (w dowolnych bazach), gdzie $\dim V = n$, $\dim W = m$.

b) Macierz przekształcenia identycznościowego $id : V \to V$ jest macierzą jednostkową $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(id) = I_n$, gdzie $\dim V = n$, B - baza przestrzeni V .

c) Dla przekształcenia $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\phi((x, y)) = (x + y, x - 3y, 2y)$

macierz tego przekształcenia w bazach kanonicznych ma postać: $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

gdyż w kolumnach wpisujemy odpowiednio $\phi((1, 0)) = (1, 1, 0)$, $\phi((0, 1)) = (1, -3, 2)$.

d) Dla przekształcenia $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2, \quad \phi(w) = (w(1), w'(2))$

wyznaczymy wartości na wektorach z bazy kanonicznej $\mathcal{A} = (x^2, x, 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.

$\phi(x^2) = (1, 4), \quad \phi(x) = (1, 1), \quad \phi(1) = (1, 0).$

Macierz tego przekształcenia w bazach kanonicznych ma postać $M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{A}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Tw. 2. Niech V, W - skończeniewymiarowe przestrzenie liniowe,

$\mathcal{A}$ - baza przestrzeni V, $\quad \mathcal{B}$ - baza przestrzeni W.

Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, $v \in V$, $w \in W$.

Wówczas $\quad \varphi(v) = w \Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{A}}(v) = M_{\mathcal{B}}(w)$

Wniosek. Jeżeli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są bazami przestrzeni V, to dla dowolnego wektora $v \in V$ zachodzi równość $\quad M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \cdot M_{\mathcal{A}}(v) = M_{\mathcal{B}}(v)$.

Przykład 7. Dana jest macierz przekształcenia $\phi : V \to W$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$

Wyznaczymy wzór tego przekształcenia dla różnych przestrzeni V i W,

przyjmując, że $\mathcal{A}$ - baza kanoniczna przestrzeni V, $\mathcal{B}$ - baza kanoniczna przestrzeni W.

a) Niech $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \mathbb{R}^2$. Z macierzy przekształcenia odczytujemy:

$\phi((1, 0, 0)) = (2, 1), \quad \phi((0, 1, 0)) = (0, 3), \quad \phi((0, 0, 1)) = (-1, 2).$

Stąd $\quad \phi((x, y, z)) = x\phi((1, 0, 0)) + y\phi((0, 1, 0)) + z\phi((0, 0, 1)) = x(2, 1) + y(0, 3) + z(-1, 2) =$

$= (2x - z, x + 3y + 2z).$

Można też wykorzystać tw. 2. Mianowicie, jeśli przyjmiemy $\; v = (x, y, z)$, to

$$M_{\mathcal{E}_2}(\phi(v)) = M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{E}_3}(v) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - z \\ x + 3y + 2z \end{bmatrix}$$

b) Niech $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \mathbb{R}_1[x]$. Z macierzy przekształcenia odczytujemy:

$\phi((1, 0, 0)) = 2x + 1, \quad \phi((0, 1, 0)) = 3, \quad \phi((0, 0, 1)) = -x + 2.$

Stąd $\quad \phi((a, b, c)) = a\phi((1, 0, 0)) + b\phi((0, 1, 0)) + c\phi((0, 0, 1)) =$

$= a(2x + 1) + b(3) + c(-x + 2) = (2a - c)x + a + 3b + 2c = (2a - c, a + 3b + 2c)_{\mathcal{B}}.$

Można też wykorzystać tw. 2.

Mianowicie, jeśli przyjmiemy $\; \mathcal{B} = (x, 1) \;\; v = (a, b, c)$, to

$$M_{\mathcal{B}}(\phi(v)) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}(\varphi)\cdot M_{\mathcal{E}_3}(v) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-c \\ a+3b+2c \end{bmatrix}.$$

c) Niech $V=\mathbb{R}_2[x]$, $W=\mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}=(x^2,x,1)$ - baza $\mathbb{R}_2[x]$. Z macierzy przekształcenia mamy:

$\phi(x^2)=(2,1)$, $\phi(x)=(0,3)$, $\phi(1)=(-1,2)$.

Stąd $\phi(ax^2+bx+c)=a\phi(x^2)+b\phi(x)+c\phi(1)=a(2,1)+b(0,3)+c(-1,2)=$

$=(2a-c,a+3b+2c)$.

Można też wykorzystać tw. 2. Mianowicie, jeśli przyjmiemy $v=ax^2+bx+c=(a,b,c)_{\mathcal{A}}$, to

$$M_{\mathcal{E}_2}(\phi(v)) = M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{A}}(\varphi)\cdot M_{\mathcal{A}}(v) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-c \\ a+3b+2c \end{bmatrix}$$

d) Niech $V=\mathbb{R}_2[x]$, $W=\mathbb{R}_1[x]$, $\mathcal{A}=(x^2,x,1)$ - baza $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B}=(x,1)$ - baza $\mathbb{R}_1[x]$.

Z macierzy przekształcenia mamy:

$\phi(x^2)=(2,1)_{\mathcal{B}}=2x+1$, $\phi(x)=(0,3)_{\mathcal{B}}=3$, $\phi(1)=(-1,2)_{\mathcal{B}}=-x+2$.

Stąd $\phi(ax^2+bx+c)=a\phi(x^2)+b\phi(x)+c\phi(1)=a(2x-1)+b(3)+c(-x+2)=$

$=(2a-c)x+a+3b+2c=(2a-c,a+3b+2c)_{\mathcal{B}}$.

Można też wykorzystać tw. 2. Mianowicie, jeśli przyjmiemy $v=ax^2+bx+c=(a,b,c)_{\mathcal{A}}$, to

$$M_{\mathcal{B}}(\phi(v)) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)\cdot M_{\mathcal{A}}(v) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-c \\ a+3b+2c \end{bmatrix}$$

Tw. 3. Niech $\varphi: V\to W$ i $\psi: W\to U$ - przekształcenia liniowe,
gdzie V,W,U - przestrzenie liniowe skończonego wymiaru nad ciałem $\mathbb{K}$.
Niech $\mathcal{A}$ - baza przestrzeni V, $\mathcal{B}$ - baza przestrzeni W, $\mathcal{C}$ - baza przestrzeni U.
Wówczas $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(\psi\circ\varphi)=M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\psi)\cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$.

Przykład 8. Wykorzystując macierze wyznaczymy macierz oraz wzór przekształcenia $\psi\circ\phi$, gdzie $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $\phi((x,y))=(2x-y,3y,x-4y)$, $\psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $\psi((x,y,z))=2x-5z$.

Macierze tych przekształceń w bazach kanonicznych to:

$$M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(\phi) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \text{ oraz } M_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_3}(\psi) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z tw. 3. $M_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2}(\psi \circ \phi) = M_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_3}(\psi) \cdot M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(\phi) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 18 \end{bmatrix}$

A stąd $M_{\mathcal{E}_1}\Big((\psi \circ \phi)((x,y))\Big) = M_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2}(\psi \circ \phi) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 18 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + 18y \end{bmatrix}$

i wzór $(\psi \circ \phi)((x,y)) = -x + 18y$.

Stw. 1. Jeżeli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są bazami przestrzeni V, to $M_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id)$.

Stw. 2 . Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym (V, W - przestrzenie skończonego wymiaru) $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ - bazy przestrzeni V, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ - bazy przestrzeni W.
Wówczas zachodzi równość:

$$M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(\varphi) = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(id) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}(id)$$

Przykład 9. Wykorzystując macierze wyznaczymy wzór przekształcenia z przykładu 3.

Przypomnijmy: $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, baza $\mathcal{A} = (v_1, v_2) = ((2,1),(3,1))$, stąd $M_{\mathcal{E}_2}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ponadto $\phi((2,1)) = (3,1)$, $\phi((3,1)) = (2,1)$,

czyli $\phi(v_1) = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = (0,1)_{\mathcal{A}}$, $\phi(v_2) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = (1,0)_{\mathcal{A}}$.

Na tej podstawie możemy zapisać macierz przekształcenia w bazie $\mathcal{A}$ $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Wzór przekształcenia możemy odczytać z macierzy przekształcenia w bazach kanonicznych.

Zgodnie ze stwierdzeniem 2. możemy zapisać

$$M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(\phi) = M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{A}}(id) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}_2}(id),$$

gdzie $M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{A}}(id) = M_{\mathcal{E}_2}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{E}_2}(id) = \Big(M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{A}}(id)\Big)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Dostajemy $M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(\phi) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A stąd $M_{\mathcal{E}_2}\big(\phi((x,y))\big) = M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(\phi) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+5y \\ y \end{bmatrix}.$

Na tej podstawie dostajemy wzór przekształcenia $\phi((x,y)) = (-x+5y, y)$.

Def. **Jądrem przekształcenia liniowego** $\varphi : V \to W$ nazywamy zbiór

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in V : \varphi(v) = \mathbf{0}_W\}.$$

Def. **Obrazem przekształcenia liniowego** $\varphi : V \to W$ nazywamy zbiór

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(v) : v \in V\}.$$

Tw. 4. Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wtedy:
$\operatorname{Ker}\varphi$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V,
$\operatorname{Im}\varphi$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej W.

Tw. 5. Jeśli V jest przestrzenią liniową skończonego wymiaru, to dla dowolnego przekształcenia liniowego $\varphi : V \to W$ zachodzi równość

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi.$$

Def. Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.
Jeśli $\operatorname{Im}\varphi$ jest przestrzenią skończeniewymiarową to liczbę $\dim \operatorname{Im}\varphi$ nazywamy **rzędem** przekształcenia liniowego φ i oznaczamy $r(\varphi)$.

Tw. 6. Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym,
$\mathcal{A}$ - baza przestrzeni V, $\mathcal{B}$ - baza przestrzeni W.
Wówczas $r(\varphi) = r\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)\right)$.

Uwaga: Rząd macierzy przekształcenia nie zależy od wyboru bazy
(wszystkie macierze tego samego przekształcenia mają jednakowy rząd).

Przykład 10. Wyznaczymy jądro i obraz poznanych przekształceń z przykładu 1.

a) Przekształcenie zerowe $\varphi : V \to W, \quad \forall v \in V \quad \varphi(v) = \mathbf{0}_W$

Jądro przekształcenia $\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in V : \varphi(v) = \mathbf{0}_W\} = V$ - cała dziedzina przekształcenia.

Obraz przekształcenia $\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(v) : v \in V\} = \{\mathbf{0}_W\}$ - podprzestrzeń zerowa przestrzeni W.

Rząd przekształcenia wynosi zero.

b) Przekształcenie identycznościowe $\mathrm{id}_V : V \to V, \quad \forall v \in V \ \ \mathrm{id}_V(v) = v$

Jądro przekształcenia $\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in V : \mathrm{id}(v) = \mathbf{0}_V\} = \{v \in V : v = \mathbf{0}_V\} = \{\mathbf{0}_V\}$ - podprzestrzeń zerowa przestrzeni V.

Obraz przekształcenia $\operatorname{Im}\varphi = \{\mathrm{id}(v) : v \in V\} = \{v \in V\} = V$ - cała dziedzina przekształcenia.

Rząd przekształcenia jest równy wymiarowi przestrzeni V.

c) Funkcja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \phi((x, y)) = (x + y, x - 3y, 2y)$

Jądro przekształcenia $\operatorname{Ker}\phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x + y, x - 3y, 2y) = (0, 0, 0)\}$

Aby wyznaczyć jądro przekształcenia należy rozwiązać jednorodny układ równań $\begin{cases} x + y &= 0 \\ x - 3y &= 0 \\ 2y &= 0 \end{cases}$

Jedynym rozwiązaniem tego układu jest $(0, 0)$, więc $\operatorname{Ker}\phi = \{(0, 0)\}$ - podprzestrzeń zerowa przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Zastosujemy Tw. 5, aby wyznaczyć wymiar obrazu przekształcenia.

$\dim V = \dim \operatorname{Ker}\phi + \dim \operatorname{Im}\phi$

W naszym przypadku podstawiamy $\dim V = 2, \ \dim \operatorname{Ker}\phi = 0$ i dostajemy

$2 = 0 + \dim \operatorname{Im}\phi \quad \Rightarrow \quad r(\phi) = \dim \operatorname{Im}\phi = 2.$

Wiemy już, że wymiar obrazu przekształcenia jest równy 2.
Oznacza to, że $\operatorname{Im}\phi$ jest dwuwymiarową podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Obraz przekształcenia $\operatorname{Im}\phi = \{(x + y, x - 3y, 2y) : \ x, y \in \mathbb{R}\}$.

Wyznaczymy bazę tej podprzestrzeni.

Wektory należące do obrazu można zapisać w postaci:
$w = (x + y, x - 3y, 2y) = x(1, 1, 0) + y(1, -3, 2)$.

Są więc kombinacjami liniowymi wektorów $w_1 = (1, 1, 0)$ i $w_2 = (1, -3, 2)$,
czyli $\operatorname{Im}\phi = Lin\{(1, 1, 0), (1, -3, 2)\}$.

Układ wektorów $(w_1, w_2) = ((1, 1, 0), (1, -3, 2))$ jest liniowo niezależny, więc jest bazą przestrzeni $\operatorname{Im}\phi$.

Bazę obrazu przekształcenia możemy też wyznaczyć na podstawie macierzy tego przekształcenia.

$M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

W kolumnach tej macierzy zapisane są wektory, które generują przestrzeń $\operatorname{Im}\phi$.

Zauważmy, że to są właśnie wektory $w_1 = (1,1,0)$ i $w_2 = (1,-3,2)$ wyznaczone wcześniej.

Def. Przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ nazywamy **nieosobliwym**, jeśli jest różnowartościowe.

Tw. 7. Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym (V - ma skończony wymiar).
Następujące warunki są równoważne:
(1) φ jest przekształceniem nieosobliwym,
(2) $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}_V\}$
(3) $r(\varphi) = \dim V$.

Def. Przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ nazywamy **izomorfizmem**, jeśli jest różnowartościowe i "na". Przestrzenie V i W nazywamy wtedy **izomorficznymi**.

Stw. 3. Przekształcenie $\varphi : V \to W$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy
$\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}_V\}$ i $\operatorname{Im}\varphi = W$.

Uwaga: Wymiary izomorficznych przestrzeni skończenie wymiarowych są równe.

Uwaga: Macierz izomorfizmu jest macierzą kwadratową nieosobliwą.

Jeśli V i W są przestrzeniami liniowymi skończeniewymiarowymi i $\dim V = \dim W$
to każde przekształcenie nieosobliwe $\varphi : V \to W$ jest izomorfizmem.

Przykład 11. Sprawdzimy, czy podane przekształcenie liniowe jest izomorfizmem oraz wyznaczymy jego jądro i obraz.

$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \phi((x,y,z)) = (x-y+z, z-y, y-x-z)$

Napiszemy wzór w postaci uporządkowanej, aby łatwo zapisać macierz przekształcenia.

$\phi((x,y,z)) = (x-y+z, -y+z, -x+y-z)$, stąd $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rząd macierzy przekształcenia jest równy 2, bo jedną kolumnę można skreślić ($k_2 = -k_3$) i pozostanie macierz z dwiema kolumnami liniowo niezależnymi.

W takim razie rząd przekształcenia też jest równy 2, więc to nie jest przekształcenie "na", więc nie jest również izomorfizmem.

Obraz przekształcenia jest przestrzenią generowaną przez wektory zapisane w kolumnach macierzy tego przekształcenia. Zauważyliśmy wyżej, że spośród trzech kolumn macierzy możemy wybrać najwyżej dwie, aby mieć układ liniowo niezależny. Wektory zapisane w tych dwóch kolumnach będą stanowiły bazę przestrzeni $\operatorname{Im}\phi$, może to być np. układ $((1,0,-1),(-1,-1,1))$.

Jądro przekształcenia to zbiór $\operatorname{Ker}\phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-y+z, -y+z, -x+y-z) = (0,0,0)\}$

Aby wyznaczyć jądro przekształcenia należy rozwiązać jednorodny układ równań $\begin{cases} x-y+z &= 0 \\ -y+z &= 0 \\ -x+y-z &= 0 \end{cases}$

Ostatnie równanie możemy pominąć, bo jest wielokrotnością pierwszego.

Macierz zredukowanego układu ma postać $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Ostatnia macierz odpowiada układowi

$$\begin{cases} x &= 0 \\ -y+z &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ z &= y \\ y &\in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jądro przekształcenia jest zbiorem wektorów $\operatorname{Ker}\phi = \{(0,y,y) : \ y \in \mathbb{R}\} = Lin\{(0,1,1)\}$.

Jest to jednowymiarowa podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^3$ generowana przez wektor $(0,1,1)$.

Układ składający się z tego wektora jest bazą tej podprzestrzeni.

Tw. 8. Każda przestrzeń liniowa wymiaru n nad ciałem $\mathbb{K}$ jest izomorficzna z $\mathbb{K}^n$.

Przykład 12. Przestrzenie $\mathbb{R}_2[x]$ i $\mathbb{R}^3$ są izomorficzne. Wskażemy izomorfizm tych przestrzeni.

Niech $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$ - kanoniczna baza przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$,

$\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3) = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ - baza kanoniczna przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Izomorfizm $\Phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ definiujemy następująco:

$\Phi(x^2) = e_1, \quad \Phi(x) = e_2, \quad \Phi(1) = e_3.$ Równoważnie: $\Phi(ax^2+bx+c) = (a,b,c)$.

Macierz tego przekształcenia $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest nieosobliwa, więc Φ jest izomorfizmem.