Układy równań liniowych

Równanie liniowe z niewiadomymi $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}$ to równanie postaci

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \beta,$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n, \beta$ są danymi elementami ciała $\mathbb{K}$.

Będziemy rozważać układy m równań liniowych z n niewiadomymi:

$$(\star) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu (*) nazywamy każdy ciąg elementów $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}$ spełniający ten układ.

Macierz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy macierzą współczynników układu równań,
macierz $B = [b_i]_{m\times 1}$ nazywamy kolumną (wektorem) wyrazów wolnych.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Interpretacja geometryczna dla przypadku ukladu równań z trzema niewiadomymi.

- Pojedyncze równanie liniowe opisuje zbiór punktów pewnej płaszczyzny w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ - zbiór rozwiązań takiego równania to zbiór punktów z tej właśnie płaszczyzny (zbiór rozwiązań jest dwuwymiarowy).
- Układ dwóch równań liniowych opisuje zbiór punktów należących do części wspólnej dwóch płaszczyzn. Najczęściej takie płaszczyzny przecinają się wzdłuż prostej i wtedy zbiór rozwiązań jest jednowymiarowy. W przypadku, gdy równania opisują dwie płaszczyzny pokrywające się, zbiorem rozwiązań jest ta płaszczyzna. W przypadku, gdy równania opisują różne płaszczyzny równoległe, zbiór rozwiązań jest pusty.
- Układ trzech równań liniowych opisuje zbiór punktów należących do części wspólnej trzech płaszczyzn. W typowej sytuacji takie płaszczyzny przecinają się w jednym punkcie, wtedy istnieje dokładnie jedno rozwiązanie tego układu równań (rozwiązanie jest określone jednoznacznie). Wzajemne położenie trzech płaszczyzn może być inne i np. zbiorem rozwiązań

może być jedna płaszczyzna lub jedna prosta. Układ równań może nie mieć rozwiązań (układ sprzeczny), gdy np. dwie z trzech płaszczyzn są równoległe.

Układ równań liniowych nazywamy **jednorodnym**, jeśli wszystkie wyrazy wolne są równe 0. W przeciwnym wypadku układ nazywamy **niejednorodnym**.

Uwaga: Każdy układ jednorodny ma co najmniej jedno rozwiązanie.
Jest nim rozwiązanie zerowe $x_1 = ... = x_n = 0$.
Zbiór rozwiązań układu jednorodnego jest pewną podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Uwaga: Wprowadźmy oznaczenie $X = [x_j]_{n\times 1}$. (X – wektor niewiadomych)
Układ ($\star$) jest wtedy równoważny równaniu macierzowemu $A \cdot X = B$,
gdzie X jest niewiadomą macierzą, A, B - danymi macierzami.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Def. Układ ($\star$) nazywamy **układem Cramera**, jeśli liczba równań jest równa liczbie niewiadomych oraz macierz współczynników układu ma wyznacznik różny od zera.

Metoda Cramera

Tw. Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie.
Jeżeli układ ($\star$) jest układem Cramera z n niewiadomymi, to rozwiązanie dane jest wzorami

$$x_1 = \frac{\det A_{(x_1)}}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_{(x_2)}}{\det A}, \quad ..., \quad x_n = \frac{\det A_{(x_n)}}{\det A} \qquad \textbf{(wzory Cramera)}$$

gdzie $A = [a_{ij}]$ oraz $A_{(x_j)}$ oznacza macierz otrzymaną z macierzy A poprzez zastąpienie kolumny współczynników przy niewiadomej x_j kolumną wyrazów wolnych.

Uwaga. Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu Cramera jest rozwiązanie zerowe.

Przykład 1. Rozwiążemy układ równań korzystając ze wzorów Cramera.

Dla układu $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = -1 \\ 4x + 4y - 3z = 3 \\ -x - y + z = 2 \end{cases}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$

Obliczamy potrzebne wyznaczniki.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\det A_{(x)} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \det A_{(y)} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad \det A_{(z)} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

I dostajemy rozwiązanie: $x = \dfrac{\det A_{(x)}}{\det A} = 3,\ y = \dfrac{\det A_{(y)}}{\det A} = 6,\ z = \dfrac{\det A_{(z)}}{\det A} = 11.$

Metoda macierzowa

Tw. Jeżeli układ $(\star)$ jest układem Cramera z n niewiadomymi,
to równanie macierzowe $A \cdot X = B$, gdzie $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $B = [b_i]_{n\times 1}$, $X = [x_j]_{n\times 1}$
ma dokładnie jedno rozwiązanie $X = A^{-1} \cdot B$.

Przykład 2. Rozwiążemy metodą macierzową układ równań z przykładu 1.

Potrzebna będzie macierz odwrotna do A. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Obliczamy $X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}.$

Def. Macierzą rozszerzoną układu $(\star)$ nazywamy macierz

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Metoda eliminacji dla układów Cramera

Zapisujemy macierz rozszerzoną układu równań $[A|B]$.
Następnie wykonujemy serię operacji na wierszach macierzy $[A|B]$, tak aby uzyskać macierz postaci $[I_n|X]$ (macierz jednostkowa ma powstać w miejscu macierzy A).
Wtedy wektor X jest wektorem rozwiązań układu.

Schemat postępowania: $[A|B] \xrightarrow{\text{operacje na wierszach}} [I|X]$

Możemy wykonywać następujące operacje na wierszach przekształcanej macierzy $[A|B]$:

- mnożenie wiersza przez skalar różny od zera ($\alpha \cdot w_i$),
- dodawanie do wiersza wielokrotności innego wiersza ($w_i + \alpha \cdot w_j$),
- zamiana wierszy miejscami ($w_i \longleftrightarrow w_j$).

Przykład 3. Rozwiążemy metodą eliminacji układ równań z przykładu 1.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1+3w_3;\ w_2+4w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)w_3;(-1)w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1+w_2;w_3\to w_1\to w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right] = [I|X] \quad \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Uwaga: Metoda eliminacji (w szczególności metoda kolumn jednostkowych) jest bardzo efektywna, gdy chcemy jednocześnie rozwiązać szereg układów Cramera z taką samą lewą stroną, ale z różnymi prawymi stronami.

Jeśli mamy układy równań o macierzach rozszerzonych:

$[A|B_1]$, $[A|B_2]$, $\ldots$, $[A|B_k]$, gdzie A jest macierzą nieosobliwą stopnia n, to możemy wykonać operacje na wierszach, niezmieniające rzędu na macierzy $[A|B_1|B_2|\ldots|B_k]$ tak, by w miejscu macierzy A dostać macierz I_n.

Schemat działania następujący:

$$[A|B_1|B_2|\ldots|B_k] \xrightarrow{\textit{operacje na wierszach}} [I_n|X_1|X_2|\ldots|X_k]$$

Wtedy w kolumnach $X_1, X_2, \ldots X_k$ macierzy wynikowej będą rozwiązania poszczególnych układów równań.

Tw. Kroneckera-Capellego

Układ równań liniowych ($\star$) o macierzy rozszerzonej $A|B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A|B)$.

Ponadto

1° jeśli $r(A) = r(A|B) = n$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie,

2° jeśli $r(A) = r(A|B) = k < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - k$ zmiennych (parametrów).

Przykład 4. Określimy liczbę rozwiązań oraz podamy rozwiązanie układu $\begin{cases} x - y + 2z &= 4 \\ -x + 2y + z &= 3 \\ y + 3z &= 7 \end{cases}$

Zastosujemy tw. Kroneckera-Capellego. W celu wyznaczenia rzędów macierzy wykonamy takie operacje na wierszach macierzy rozszerzonej tego ukladu, które nie zmieniają rzędu macierzy.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2+w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{skreślenie } w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] = [\widetilde{A}|\widetilde{B}]$$

Otrzymana macierz odpowiada układowi równań równoważnemu temu pierwotnemu.
Zachodzi równość rzędów macierzy $r(A) = r(\widetilde{A})$ oraz $r[A|B] = r[\widetilde{A}|\widetilde{B}]$.
Wiersze macierzy $\widetilde{A}$ są liniowo niezależne, więc $r(\widetilde{A}) = r(A) = 2$, podobnie $r[A|B] = 2$, liczba niewiadomych układu to $n = 3$. Na mocy Tw. Kroneckera-Capellego układ równań posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r = 1$ parametru.
Rozwiązanie jest jednowymiarowe (prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$).
Do rozwiązania układu zastosujemy metodę kolumn jednostkowych.

Metoda kolumn jednostkowych

Jeżeli $r(A) = r(A|B) = k < n$, to wykonując operacje wierszowe na macierzy $[A|B]$ możemy uzyskać taką postać macierzy A, w której będzie k liniowo niezależnych kolumn macierzy jednostkowej I_k. Gdy taką postać uzyskamy, pozostawiamy po lewej stronie układu zmienne odpowiadające kolumnom jednostkowym, a pozostałe przenosimy na prawą stronę równań. Odczytujemy rozwiązanie, traktując zmienne, które pojawiły się po prawej stronie jako parametry.

$$[A|B] = \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1+w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

Dostaliśmy macierz z maksymalną liczbą niezależnych kolumn jednostkowych. Możemy z niej odczytać rozwiązanie.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{równoważnie} \begin{cases} x + 5z &= 11 \\ y + 3z &= 7 \end{cases}$$

Zmienne x i y odpowiadają kolumnom jednostkowym, a zmienna z będzie parametrem (przenosimy ją na prawą stronę równań). Zmienne x i y będą wyrażone za pomoca zmiennej z. Otrzymujemy następujące rozwiązanie układu:

$$\begin{cases} x = 11 - 5z \\ y = 7 - 3z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{równoważny zapis kolumnowy: } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Z postaci kolumnowej łatwo otrzymujemy interpretację geometryczną rozwiązań:
są to punkty w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ należące do prostej zawierającej punkt $X_0 = (11, 7, 0)$
o kierunku wektora $\overrightarrow{v} = (-5, -3, 1)$.

Przykład 5. Określimy liczbę rozwiązań układu $\begin{cases} x + y + az &= 1 \\ ax - 2y + 4z &= a + 2 \end{cases}$
w zależności od $a \in \mathbb{R}$.

Macierz rozszerzona układu to $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ a & -2 & 4 & a+2 \end{array}\right]$

Zastosujemy tw. Kroneckera-Capellego.
Na początku wybiarzemy minor maksymalnego stopnia (czyli minor stopnia 2) macierzy A.

Niech to będzie minor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & -2 \end{vmatrix} = -2 - a$

Wybrany minor jest niezerowy dla $a \neq -2$ i wtedy mamy $r(A) = r([A|B]) = 2$,
więc rozwiązania isnieją. Liczba niewiadomych $n = 3$, więc jest nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r = 1$ zmiennej.

Gdy $a = -2$ mamy $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right]$

i wtedy $r(A) = 1$, bo zachodzi $w_2 = -2w_1$ - zależność wierszy macierzy A,

ale $r([A|B]) = 2$, bo żaden wiersz macierzy $[A|B]$ nie jest wielokrotnością innego wiersza tej macierzy.

W tej sytuacji układ nie posiada rozwiązań, gdyż $r(A) \neq r([A|B])$.

Przykład 6. Sprawdzimy, czy wektor $(1, 2, 3, 4)$ jest kombinacją liniową wektorów $(1, 2, 1, 2), (1, 2, 1, 3), (4, 3, 2, 1)$.

Sprawdzimy, czy istnieją takie liczby $x, y, z \in \mathbb{R}$, dla których zachodzi równość:

$$x(1, 2, 1, 2) + y(1, 2, 1, 3) + z(4, 3, 2, 1) = (1, 2, 3, 4).$$

W zapisie kolumnowym: $x\begin{bmatrix}1\\2\\1\\2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\2\\1\\3\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$

Powyższa rowność jest równoważna układowi równań liniowych o macierzy rozszerzonej

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&4&1\\2&2&3&2\\1&1&2&3\\2&3&1&4\end{array}\right].$$

Wykonamy serię operacji na wierszach tej macierzy niezmieniających jej rzędu.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&4&1\\2&2&3&2\\1&1&2&3\\2&3&1&4\end{array}\right]\begin{array}{c}w_2-2w_1\\w_3-w_1\\w_4-2w_1\\\longrightarrow\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&4&1\\0&0&-5&0\\0&0&-2&2\\0&1&-7&2\end{array}\right]\begin{array}{c}w_2:(-5)\\w_3:(-2)\\\longrightarrow\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&4&1\\0&0&1&0\\0&0&1&-1\\0&1&-7&2\end{array}\right]$$

Dostaliśmy układ sprzeczny, bo drugi wiersz jest rownoważny równaniu: $z=0$,
a trzeci odpowiada rownaniu: $z=-1$.

Nie istnieją rozwiązania tego układu równań, co jest równoważne temu, że podany wektor nie jest kombinacją liniową wymienionych wektorów (nie należy do przestrzeni rozpiętej przez te wektory).

Def. Jądrem macierzy $A\in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ nazywamy zbiór wszystkich macierzy $X\in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$, takich że $AX=\mathbf{0}$.
Jądro macierzy A oznaczamy symbolem $\operatorname{Ker} A$ i traktujemy jako podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{K}^n$.
Wyznaczenie jądra macierzy odpowiada rozwiązaniu jednorodnego układu równań o macierzy rozszerzonej $[A|\mathbf{0}]$. Pojęcie jądra macierzy A odpowiada pojęciu jądra przekształcenia liniowego, którego macierz w ustalonych bazach jest równa macierzy A.

Def. Układem fundamentalnym rozwiązań równania $AX=\mathbf{0}$ nazywamy dowolną bazę przestrzeni rozwiązań tego układu, czyli bazę przestrzeni $\operatorname{Ker} A$.

Przykład 7. Wyznaczymy jądro macierzy $A=\begin{bmatrix}1&2&-1&6\\-3&5&4&2\end{bmatrix}$.

Rozwiązujemy układ jednorodny o macierzy rozszerzonej $[A|\mathbf{0}]$, przyjmiemy wektor niewiadomych (x,y,z,t).

Do rozwiązania układu zastosujemy metodę eliminacji (kolumn jednostkowych).

$$[A|\mathbf{0}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2+3w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & 20 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1+w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 13 & 0 & 26 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & 20 & 0 \end{array}\right]$$

Mamy już postać macierzy z dwiema kolumnami jednostkowymi, możemy odczytać rozwiązanie. Wyznaczymy zmienne x i z za pomocą zmiennych y i t.

$$\begin{cases} x + 13y + 26t &= 0 \\ 11y + z + 20t &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -13y - 26t \\ z &= -11y - 20t \\ y, t &\in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ -11 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -26 \\ 0 \\ -20 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jądro macierzy A to $\operatorname{Ker} A = Lin\left\{ \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ -11 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -26 \\ 0 \\ -20 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Postać rozwiązania układu równań

Rozważmy układ $(\star)$ o macierzy rozszerzonej $[A|B]$.

Niech X_0 będzie **rozwiązaniem szczególnym** równania $AX = B$.

Wówczas zbiór wszystkich rozwiązań równania $AX = B$ możemy wyznaczyć jako $X_0 + \operatorname{Ker} A$.

Każde rozwiązanie układu o macierzy rozszerzonej $[A|B]$ jest sumą pewnego rozwiązania szczególnego X_0 oraz kombinacji liniowej wektorów z układu fundamentalnego rozwiązań.

Przykład 8. Rozwiążemy układ równań $\begin{cases} x + 2y - z + 6t &= 5 \\ -3x + 5y + 4z + 2t &= 6 \end{cases}$

Macierz rozszerzona tego ukladu to $[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 & 5 \\ -3 & 5 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right]$

Znamy jądro macierzy A (wyznaczone w przykładzie 7). Aby wyznaczyć zbiór wszystkich rozwiązań tego układu, wystarczy wskazać jakieś rozwiązania szczególne X_0.

Takim rozwiązaniem jest np. $X_0 = (0, 0, 1, 1)$.

Rozwiązania układu możemy więc zapisać następująco:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = X_0 + \operatorname{Ker} A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ -11 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -26 \\ 0 \\ -20 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y, t \in \mathbb{R}.$$

Jest to tzw. **rozwiązanie ogólne** niejednorodnego układu równań.

Rozwiązywanie układów równań liniowych

Metoda wyznacznikowa

Jeżeli $r(A) = r(A|B) = k < n$, to usuwamy z układu (*) te równania, w których współczynniki przy niewiadomych nie wchodzą do niezerowego minora stopnia k (wcześniej wskazujemy taki minor). Nastepnie po lewej stronie pozostawiamy te zmienne, których współczynniki weszły do wskazanego niezerowego minora. Pozostałe składniki przenosimy na prawą stronę równań. Ze względu na zmienne po lewej stronie układ jest układem Cramera. Rozwiązujemy ten układ traktując pozostałe zmienne (jest ich $n - k$) jako parametry.

Metoda eliminacji

Następujące operacje wierszowe nie zmieniają rozwiązania:
- pomnożenie wiersza przez stałą różną od zera
- zamiana wierszy miejscami
- dodanie do wiersza kombinacji liniowej innych wierszy
- skreślenie zerowego wiersza
- skreślenie wiersza liniowo zależnego od innych wierszy.

Przy pomocy operacji wierszowych sprowadzamy macierz rozszerzoną układu równań do postaci trapezowej (schodkowej) (eliminacja Gaussa). Inną modyfikacją metody eliminacji jest metoda kolumn jednostkowych.

Metoda eliminacji Gaussa

Jeżeli istnieje wiersz, w którym są same zera oprócz ostatniej kolumny, to układ jest sprzeczny. W przeciwnym przypadku można niewiadome odpowiadające kolumnom wiodącym (tym, w których są schodki) wyrazić za pomocą pozostałych, które traktujemy jako parametry. Wyznaczamy niewiadome zaczynając od ostaniego równania, wstawiając później wyznaczone zmienne do kolejnych wyższych równań.

Metoda kolumn jednostkowych

Jeżeli $r(A) = r(A|B) = k < n$, to wykonując operacje wierszowe na macierzy $(A|B)$ możemy uzyskać taką postać macierzy A, w której będzie k liniowo niezależnych kolumn macierzy jednostkowej I_k. Gdy taką postać uzyskamy, pozostawiamy po lewej stronie układu zmienne odpowiadające kolumnom jednostkowym, a pozostałe przenosimy na prawą stronę równań. Odczytujemy rozwiązanie, traktując zmienne, które pojawiły się po prawej stronie jako parametry.

Wykorzystanie rozwiązania szczególnego i ukladu fundamentalnego rozwiązań

Układ (*) można rozwiązać znajdując jego jedno rozwiązanie szczególne X_0 oraz wyznaczając układ fundamentalny rozwiązań odpowiadającego mu układu jednorodnego. Wtedy rozwiązaniem układu (*) będzie suma $X_0 + X_B$, gdzie X_B jest kombinacją liniową wektorów z układu fundamentalnego rozwiązań.