Przestrzenie liniowe

Def. **Przestrzenią liniową (wektorową) nad** $\mathbb{K}$ nazywamy trójkę $((V,+),(\mathbb{K},\oplus,\odot),\cdot)$ o następujących własnościach:

1) $(V,+)$ jest grupą przemienną,
2) $(\mathbb{K},\oplus,\odot)$ jest ciałem,
3) $\cdot : \mathbb{K}\times V \to V$ jest działaniem zewnętrznym ciała $\mathbb{K}$ na zbiór V
   spełniającym dla dowolnych $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ i dowolnych $u,v\in V$ następujące warunki:
   1° $(\alpha\oplus\beta)\cdot v = \alpha\cdot v + \beta\cdot v$
   2° $\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u + \alpha\cdot v$
   3° $\alpha\cdot(\beta\cdot v) = (\alpha\odot\beta)\cdot v$
   4° $1\cdot v = v$ (gdzie 1 oznacza jedynkę ciała $\mathbb{K}$).

Elementy zbioru V nazywamy **wektorami**, elementy zbioru $\mathbb{K}$ nazywamy **skalarami**.
Działanie $\cdot$ nazywa się **mnożeniem wektorów przez skalary.**

Przykład 1

1. Przestrzeń $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$

Wektory: $v_1=(x_1,y_1)$, $v_2=(x_2,y_2)$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Dodawanie: $v_1+v_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)$

mnożenie przez liczbę: $\alpha\cdot v_1=(\alpha x_1,\alpha y_1)$

2. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$

Wektory: $v_1=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $v_2=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Dodawanie: $v_1+v_2=(x_1+x_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$

mnożenie przez liczbę rzeczywistą: $\alpha\cdot v_1=(\alpha x_1,\alpha x_2,\ldots,\alpha x_n)$

3. Przestrzeń $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$

Wektory: $v_1=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$, $v_2=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$, $z_k\in\mathbb{C}$, $w_k\in\mathbb{C}$, $\lambda\in\mathbb{C}$

Dodawanie: $v_1+v_2=(z_1+w_1,z_2+w_2,\ldots,z_n+w_n)$

mnożenie przez liczbę zespoloną: $\lambda\cdot v_1=(\lambda z_1,\lambda z_2,\ldots,\lambda z_n)$

3a. Przestrzeń $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$ – szczególny przypadek $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$ dla $n=1$

Wektory to liczby zespolone: $v_1=z$, $v_2=w$, skalar $\lambda\in\mathbb{C}$

Dodawanie: $v_1+v_2=z+w$, mnożenie przez liczbę zespoloną: $\lambda\cdot v_1=\lambda z$.

4. Przestrzeń $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$

Wektory to liczby zespolone: $v_1 = z, \quad v_2 = w,$ skalar - liczba rzeczywista $\alpha \in \mathbb{R}$

Dodawanie: $v_1 + v_2 = z + w,$ mnożenie przez liczbę rzeczywistą: $\alpha \cdot v_1 = \alpha z.$

5. $\mathbb{R}[x]$ nad $\mathbb{R}$ – przestrzeń wielomianów o współczynnikach rzeczywistych

$w_1(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \quad w_2(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

dodawanie: $(w_1 + w_2)(x) = w_1(x) + w_2(x) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \ldots$
mnożenie przez liczbę rzeczywistą: $(\alpha \cdot w_1)(x) = \alpha \cdot w_1(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \ldots \alpha a_n x^n$

5a. $\mathbb{R}_n[x]$ nad $\mathbb{R}$ – przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej n

6. $\mathbb{C}[x]$ nad $\mathbb{C}$ – przestrzeń wielomianów o współczynnikach zespolonych

6a. $\mathbb{C}_n[x]$ nad $\mathbb{C}$ – przestrzeń wielomianów zespolonych stopnia co najwyżej n

Element neutralny grupy $(V, +)$ nazywamy **wektorem zerowym** i oznaczamy $\mathbf{0}$.
Wektor przeciwny do $v \in V$ w grupie $(V, +)$ oznaczamy symbolem $-v$.
Różnica wektorów $v - u = v + (-u)$ dla $v, u \in V$.

Przykład 2.

- W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ wektor zerowy to $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$,
  wektor przeciwny do $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ to $-v = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$

- W przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]$ nad $\mathbb{R}$ wektor zerowy to wielomian stały równy 0,
  wektor przeciwny do $w(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, to $(-w)(x) = -a_0 - a_1 x - \ldots - a_n x^n$.

Tw. 1. Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{K}$, $v \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$.
Wówczas
1. $\alpha v = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee v = \mathbf{0}$
2. $(-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha v)$

Podprzestrzenie

Jeśli $f : X \to Y$ i $A \subseteq X$, to funkcję $\varphi : A \to Y$ taką, że dla każdego $x \in A$ zachodzi $\varphi(x) = f(x)$ nazywamy obcięciem funkcji f do zbioru A.
Stosujemy oznaczenie: $\varphi = f|_A$.

Def. Podzbiór $W \subseteq V$ z odpowiednimi działaniami nazywamy **podprzestrzenią** przestrzeni $((V, +), \mathbb{K}, \cdot)$, jeśli trójka $((W, +|_W), \mathbb{K}, \cdot|_W)$ jest przestrzenią liniową.

Tw. 2. Niech $((V,+),\mathbb{K},\cdot)$ będzie przestrzenią liniową.

Trójka $((W,+),\mathbb{K},\cdot)$, gdzie $W \subseteq V$ jest podprzestrzenią przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy

1^0 $\forall v, w \in W \quad v+w \in W$ (addytywność)

2^0 $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall v \in W \quad \alpha v \in W$ (jednorodność)

(lub równoważnie $\forall \alpha \in \mathbb{K}\ \forall v, w \in W\ \alpha v + w \in W$).

Uwaga: Z warunku jednorodności dla $\alpha = 0$ wynika, że do każdej podprzestrzeni dowolnej przestrzeni należy wektor zerowy.

Własności podprzestrzeni

- Jeśli $\mathbf{0}$ – wektor zerowy przestrzeni liniowej V, to $\{\mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V. Taką podprzestrzeń nazywa się **przestrzenią zerową** lub **trywialną**.
- Każda przestrzeń liniowa jest swoją własną podprzestrzenią, którą nazywamy podprzestrzenią **niewłaściwą**.
- Jeśli U i W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V, to $U \cap W$ jest podprzestrzenią V.
- Jeśli U i W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V, to $U + W = \{u + w : u \in U \wedge w \in W\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Przykład 3. Sprawdzimy, czy podane zbiory są podprzestrzeniemi przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

a) $W_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = 0\} = \{(x,0) :\ x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Zbiór W_1 możemy traktować jak prostą na płaszczyźnie.

Sprawdzamy warunki z twierdzenia 2.

Weźmy dowolne dwa wektory ze zbioru W_1: $w_1 = (x_1, 0)$, $w_2 = (x_2, 0)$ i liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy

$w_1 + w_2 = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in W_1$, bo spełnia warunek $y = 0$

także $\alpha \cdot w_1 = \alpha \cdot (x_1, 0) = (\alpha x_1, 0) \in W_1$, bo spełnia warunek $y = 0$.

Widzimy więc, że zarówno suma dowolnych wektorów ze zbioru W_1 jak i wielokrotność wektora ze zbioru W_1 należą do zbioru W_1, więc W_1 jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

b) $W_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + 2y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Ten zbiór też jest prostą na plaszczyźnie.

Weźmy dowolne dwa wektory ze zbioru W_2: $w_1 = (x_1, y_1)$, $w_2 = (x_2, y_2)$ i liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$.

Zachodzą równości: $x_1 + 2y_1 = 0$ oraz $x_2 + 2y_2 = 0$ charakteryzujące wektory zbioru W_2.

Po dodaniu równości stronami dostaniemy: $(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 0$,

więc odpowiednia równość będzie też spełniona dla współrzędnych sumy tych wektorów, czyli

$w_1 + w_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W_2$.

Jeśli wektor w_1 pomnożymy przez liczbę α, to dostaniemy wektor $\alpha \cdot w_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1)$,
który również należy do W_2, bo jeśli $x_1 + 2y_1 = 0 \Rightarrow \alpha(x_1 + 2y_1) = 0$.

Zbiór W_2 jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

c) $W_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Weźmy wektor ze zbioru W_3 np. $w = (1, 1)$ oraz liczbę np. $\alpha = 2$.

Po przemnożeniu dostaniemy $\alpha \cdot w = 2 \cdot (1, 1) = (2, 2) \notin W_3$.

Nie jest spełniony warunek z tw. 2, więc zbiór W_3 nie jest podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

Można też zauważyć, że wektor zerowy $0, 0)$ nie należy do zbioru W, więc nie jest to podprzestrzeń.

Przykład 4. Sprawdzimy, czy zbiór $W = \{w \in \mathbb{R}[x] : \ w(2) = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}[x]$.

Weźmy dowolne dwa wielomiany $w_1, \ w_2 \in W$ oraz liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sprawdzimy, czy $w_1 + w_2 \in W$ i czy $\alpha w_1 \in W$.

$(w_1 + w_2)(2) = w_1(2) + w_2(2) = 0 + 0 = 0$, więc warunek dla sumy wektórów jest spełniony.

$(\alpha w_1)(2) = \alpha w_1(2) = \alpha \cdot 0 = 0$, więc warunek dla wielokrotności wektora też jest spełniony.

Zbiór W jest więc podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}[x]$.

Przykład 5.

Sprawdzimy, czy podane zbiory są podprzestrzeniemi przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Niech $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ z = 0 \wedge \ t = 0\} = \{(x, y, 0, 0) : \ x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

Jest to podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Niech $W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ x = 0 \wedge \ y = 0\} = \{(0, 0, z, t) : \ z, t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$

To też jest to podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

a) Sprawdzimy, czy $W_1 \cap W_2$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$.

$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z, t) : \ x = 0 \ \wedge \ y = 0 \ \wedge \ z = 0 \ \wedge \ t = 0\} = \{(0, 0, 0, 0)\} = \{\mathbf{0}\}$

Przecięcie podanych przestrzeni jest podprzestrzenią zerową.

b) Sprawdzimy, czy $W_1 \cup W_2$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$.

$W_1 \cup W_2 = \{(x, y, z, t) : \ (x = 0 \ \wedge \ y = 0) \ \vee \ (z = 0 \ \wedge \ t = 0)\}$

Weźmy dwa wektory ze zbioru $W_1 \cup W_2$: $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$.

Ich suma $v_1 + v_2 = (1, 1, 1, 1) \notin W$, więc $W_1 \cup W_2$ nie jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$.

c) Sprawdzimy, czy $W_1 + W_2$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$.

$W_1 + W_2 = \{(x, y, 0, 0) + (0, 0, z, t) : \ x, y, z, t \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\} = \mathbb{R}^4$

Suma algebraiczna przestrzeni W_1 i W_2 jest przestrzenią $\mathbb{R}^4$ jest więc jej niewłaściwą podprzestrzenią.

Interpretacja geometryczna podprzestrzeni

- Podprzestrzenie przestrzeni $\mathbb{R}^2$ to: podprzestrzeń zerowa, cała przestrzeń $\mathbb{R}^2$ oraz proste przechodzące przez punkt $(0, 0)$.
- Podprzestrzenie przestrzeni $\mathbb{R}^3$ to: podprzestrzeń zerowa, cała przestrzeń $\mathbb{R}^3$ oraz proste przechodzące przez punkt $(0, 0, 0)$, a także płaszczyzny do których należy punkt $(0, 0, 0)$.

Kombinacje liniowe i układy wektorów

Def. Niech V - przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{K}$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$, $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, $n \in \mathbb{N}$.
Wektor $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ nazywamy **kombinacją liniową** wektorów $v_1, v_2, ..., v_n$ o współczynnikach $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $v_1, v_2, ..., v_n$ z przestrzeni V nad ciałem $\mathbb{K}$ oznaczamy $Lin\{v_1, v_2, ..., v_n\}$,
tzn. $Lin\{v_1, v_2, ..., v_n\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n : \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}\}$.
Przyjmujemy dodatkowo, że $Lin\{\emptyset\} = \{\mathbf{0}\}$.

Uwaga. Dla dowolnych wektorów $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ $Lin\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V. Przestrzeń $Lin\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ nazywamy **przestrzenią rozpiętą przez wektory** $v_1, v_2, ..., v_n$ lub **przestrzenią generowaną** przez te wektory.

Przykład 6. Przykłady w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

- Przestrzeń generowana przez dwa niezerowe wektory może być płaszczyzną lub prostą.
  $Lin\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ - płaszczyzna $z = 0$;
  $Lin\{(1, 0, 0), (2, 0, 0)\}$ - prosta opisana układem równań: $y = 0, z = 0$;

- Przestrzeń generowana przez trzy niezerowe wektory może być całą przestrzenią $\mathbb{R}^3$ lub płaszczyzną, lub prostą.
  $Lin\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ - cała przestrzeń $\mathbb{R}^3$;
  $Lin\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\}$ - płaszczyzna $z=0$;
  $Lin\{(1,1,1),(-1,-1,-1),(2,2,2)\}$ - prosta opisana układem równań: $z=x,\ y=x$.

Def. Niech $v_1, v_2, ..., v_n$ - wektory z przestrzeni V nad ciałem $\mathbb{K}$.
Ciąg $(v_1, v_2, ..., v_n)$ nazywamy **układem wektorów** w przestrzeni V nad ciałem $\mathbb{K}$.
Podukładem układu $(v_1, v_2, ..., v_n)$ nazywamy układ $(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k})$,
gdzie $1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n$.
Dodatkowo wprowadza się pojęcie układu pustego, ozn. $\emptyset$.

Def. Niech $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$. Układ wektorów $(v_1, v_2, ..., v_n)$ w przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{K}$ nazywamy **liniowo niezależnym**, jeśli zachodzi implikacja:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

W przeciwnym wypadku układ $(v_1, v_2, ..., v_n)$ nazywamy **liniowo zależnym**.

Przyjmujemy, że układ pusty jest liniowo niezależny.

Przykład 7.
Sprawdzimy, czy układ wektorów $(v_1, v_2, v_3) = ((0,1,-2),(1,2,-1),(1,0,3))$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest liniowo niezależny.

Rozwiązujemy równanie $\alpha(0,1,-2)+\beta(1,2,-1)+\gamma(1,0,3)=(0,0,0)$
równoważne układowi równań:

$$\begin{cases} \beta+\gamma=0 \\ \alpha+2\beta=0 \\ -2\alpha-\beta+3\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=-\beta \\ \alpha=-2\beta \\ 4\beta-\beta-3\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=-\beta \\ \alpha=-2\beta \\ \beta\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Układ równań posiada nieskończenie wiele rozwiązań, nie tylko rozwiązanie zerowe,
więc badany układ wektorów jest liniowo zależny.
Jednym z rozwiązań jest np. $\beta=1, \alpha=-2, \gamma=-1$, co oznacza, że $-2v_1+v_2-v_3=\mathbf{0}$,
a stąd dostajemy $v_2 = 2v_1 + v_3$, czyli wektor v_2 jest liniową kombinacją wektorów v_1 i v_3.

Stw. Układ wektorów jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z wektorów układu można wyrazić w postaci kombinacji liniowej pozostałych.

Uwaga: Sytuacje kiedy łatwo można stwierdzić, czy układ wektorów jest liniowo zależny czy liniowo niezależny:

1. Jeśli wektor zerowy jest jednym z wektorów układu, to taki układ jest liniowo zależny;

2. Układ dwóch niezerowych wektorów jest liniowo zależny $\Leftrightarrow$ jeden z wektorów jest wielokrotnością drugiego.

3. Układ składający się z jednego wektora jest liniowo zależny $\Leftrightarrow$ jest to wektor zerowy.

4. Każdy podukład układu liniowo niezależnego jest liniowo niezależny.

Przykład 8. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$

a) układ $((1,2))$ jest liniowo niezależny;
b) układ $((0,0))$ jest liniowo zależny;
c) układ $((1,2),(0,0))$ jest liniowo zależny;
d) układ $((1,2),(3,6))$ jest liniowo zależny;
e) układ $((1,2),(1,1))$ jest liniowo niezależny;
e) układ $((1,2),(0,1),(3,1))$ jest liniowo zależny, bo $(3,1) = 3\cdot(1,2) - 5\cdot(0,1)$;

Bazy przestrzeni liniowych

Def. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$.
Układ $(v_1,...,v_n)$ wektorów z przestrzeni V nazywamy **bazą** przestrzeni V, jeśli
1° układ $(v_1,...,v_n)$ jest liniowo niezależny,
2° $Lin\{v_1,...,v_n\} = V$ (układ $(v_1,...,v_n)$ rozpina przestrzeń V).

Warunek 2° jest równoważny warunkowi: $\forall w \in V \ \ \exists \alpha_1,...,\alpha_n \in \mathbb{K} \ \ w = \alpha_1 v_1 + ...\alpha_n v_n$,
tzn. każdy wektor z przestrzeni V można wyrazić w postaci kombinacji liniowej wektorów $v_1,...,v_n$. Z warunku 1° wynika, że przedstawienie to jest jednoznaczne.
Skalary $\alpha_1,...,\alpha_n$ nazywamy **współrzędnymi wektora** w w bazie $(v_1,...,v_n)$.
Przyjmujemy, że bazą przestrzeni zerowej jest układ pusty.

Przykład 9.
Sprawdzimy, czy układ wektorów $\mathcal{A} = (v_1,v_2,v_3) = ((0,1,0),(1,0,1),(0,1,-3))$
jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

1. Sprawdzamy liniową niezależność układu.
Warunek $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \mathbf{0}$ jest równoważny układowi równań:

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Układ równań posiada jedynie rozwiązanie zerowe, więc badany układ wektorów jest liniowo niezależny.

2. Sprawdzamy, czy każdy wektor przestrzeni $\mathbb{R}^3$ można przedstawić jako liniową kombinację wektorów v_1, v_2, v_3. Czy dla dowolnego wektora (x, y, z) można znaleźć liczby a, b, c takie, że $(x, y, z) = av_1 + bv_2 + cv_3$?
Równość powyższą zapiszemy jako układ równań:

$$\begin{cases} b = x \\ a + c = y \\ b - 3c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = x \\ c = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}z \\ a = y - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z \end{cases}$$

Okazuje się, że dla dowolnego wektora (x, y, z) można dobrać współczynniki a, b, c, więc układ $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
Każdy wektor przestrzeni $\mathbb{R}^3$ możemy wyrazić w bazie $\mathcal{A}$ podając jego współrzędne.
Na przykład wektor $(6, 1, -3)$ ma w tej bazie współrzędne: $(-2, 6, 3)_{\mathcal{A}}$,
bo $(-2, 6, 3)_{\mathcal{A}} = -2v_1 + 6v_2 + 3v_3 = (6, 1, -3)$.

Tw. 3. Jeżeli układy $(v_1, ..., v_n)$ oraz $(w_1, ..., w_m)$ są bazami przestrzeni V, to $n = m$.

W przestrzeni liniowej można wybrać jej bazę na wiele sposobów, ale każda baza składać się będzie z takiej samej liczby wektorów.

Def. Przestrzeń wektorową mającą (skończoną) bazę nazywamy **skończenie wymiarową**.
Jeżeli V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową, to liczbę elementów bazy przestrzeni V nazywamy **wymiarem przestrzeni** V i oznaczamy symbolem $\dim V$.
Jeżeli żaden skończony układ niezerowej przestrzeni V nie rozpina całej przestrzeni V, to mówimy, że V jest przestrzenią **nieskończenie wymiarową**.

Przykład 10.

- Bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest na przykład $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.
  Każdy układ liniowo niezależny wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^3$ może się składać co najwyżej z trzech wektorów.
- Bazą przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ jest na przykład $(x^2, x, 1)$, $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$.
- Przestrzeń wielomianów $\mathbb{R}[x]$ nie posiada skończonej bazy.

Tw. 4. Niech V będzie niezerową przestrzenią liniową.
Następujące warunki są równoważne:
(1) Układ $(v_1, ..., v_n)$ jest bazą przestrzeni V.
(2) Układ $(v_1, ..., v_n)$ jest liniowo niezależny i $\dim V = n$.
(3) $Lin\{v_1, ..., v_n\} = V$ i $\dim V = n$.
(4) Układ $(v_1, ..., v_n)$ jest maksymalnym liniowo niezależnym układem w przestrzeni V.

Niech 1 oznacza jedynkę ciała $\mathbb{K}$, 0 - zero ciała $\mathbb{K}$.
Układ $((1,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,0,...,1))$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{K}^n$ nad $\mathbb{K}$.
Bazę tę oznaczamy symbolem $\mathcal{E}_n$ i nazywamy **bazą kanoniczną** (**standardową**) przestrzeni $\mathbb{K}^n$ nad $\mathbb{K}$. Wektory z tej bazy nazywamy wektorami **jednostkowymi** i oznaczamy $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Przestrzeń wielomianów $\mathbb{K}_n[t]$ nad $\mathbb{K}$ ma wymiar $n+1$. Baza kanoniczna (standardowa) tej przestrzeni to układ $(t^n, t^{n-1}, ..., t, 1)$.

Przestrzeń $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$ jest jednowymiarowa. Baza tej przestrzeni to np. $\mathcal{B} = (1)$.

Przestrzeń $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ jest dwuwymiarowa. Baza tej przestrzeni to np. $\mathcal{B} = (1, j)$.

Kolumny i wiersze macierzy jako wektory

Uwaga. Kolumny macierzy $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ możemy interpretować jako wektory z przestrzeni $\mathbb{K}^m$, a wiersze jako wektory z przestrzeni $\mathbb{K}^n$.
Niech A_j oznacza j-tą kolumnę, zaś A^i oznacza i-ty wiersz macierzy A.
Wtedy rząd macierzy A, $r(A) = \dim Lin\{A_1, ..., A_n\} = \dim Lin\{A^1, ..., A^m\}$.
Rząd macierzy jest równy maksymalnej liczbie liniowo niezależnych kolumn (wierszy) macierzy.

Macierz układu wektorów, macierz zmiany bazy

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową o bazie $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$.
Dowolny wektor $w \in V$ możemy jednoznacznie przedstawić w postaci: $w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$.

Ozn. $M_{\mathcal{B}}(w) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ - macierz współrzędnych wektora w w bazie $\mathcal{B}$.

Symbolem $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ będziemy oznaczać macierz współrzędnych wektorów układu $\mathcal{A}$ w bazie $\mathcal{B}$.
(W kolumnach macierzy zapisujemy współrzędne kolejnych wektorów układu $\mathcal{A}$.)

Przykład 11.
W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ bazą kanoniczną jest $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3) = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.

Macierzą wektora $v = (x, y, z)$ w bazie $\mathcal{E}_3$ jest $M_{\mathcal{E}_3}(v) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Tw. 5. Niech $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ będzie bazą przestrzeni V.
Dla dowolnego układu $\mathcal{A} = (u_1, ..., u_m)$ wektorów z przestrzeni V zachodzi równość
$\dim Lin\{u_1, ..., u_m\} = r(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}))$.

Przykład 12.
Określimy wymiar przestrzeni $V = Lin\{(2,0,0,-2),(-3,0,0,3),(0,1,0,2),(0,2,0,4)\}$.

Przyjmijmy oznaczenia wektorów:
$u_1 = (2,0,0,-2),\ u_2 = (-3,0,0,3),\ u_3 = (0,1,0,2),\ u_4 = (0,2,0,4)$
oraz układu $\mathcal{U} = (u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Zgodnie z twierdzeniem 5 wymiar przestrzeni V jest równy rzędowi macierzy $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$, gdzie B jest dowolną bazą przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

Wektory u_1,u_2,u_3,u_4 mamy wyrażone w bazie kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^4$, możemy więc zapisać

macierz $M_{\mathcal{E}_4}(\mathcal{U}) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$\dim V = r(M_{\mathcal{E}_4}(\mathcal{U})) = r\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 2.$$

Tw. 6. Niech $\mathcal{B} = (v_1,...,v_n)$ będzie bazą przestrzeni V.
Następujące warunki są równoważne:
(1) Układ $\mathcal{A} = (u_1,...,u_n)$ wektorów z V jest bazą przestrzeni V,
(2) $r(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})) = n$,
(3) $\det M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \neq 0$.

Uwaga: W punkcie (3) twierdzenia 6. otrzymujemy proste kryterium pozwalające sprawdzić, czy układ wektorów jest bazą przestrzeni - wystarczy sprawdzić, czy wyznacznik macierzy tego układu jest niezerowy.

Przykład 13:

Sprawdzimy, czy układ wektorów $\mathcal{A} = (x^2-2, x+1, x)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.

Zapiszmy macierz tego układu w bazie kanonicznej $\mathcal{B} = (x^2, x, 1)$.

$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Wyznacznik tej macierzy jest równy -1, nie jest zerowy, więc układ $\mathcal{A}$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$.

Def. Jeżeli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są bazami przestrzeni V, to macierz $M_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ nazywamy **macierzą zmiany bazy** (lub **macierzą przejścia od bazy $\mathcal{A}$ do bazy $\mathcal{B}$**).

Stw. 1. Jeżeli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są bazami przestrzeni V, to $M_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = (M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}))^{-1}$.

Stw. 2. Jeżeli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są bazami przestrzeni V, $w \in V$, to $M_{\mathcal{B}}(w) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \cdot M_{\mathcal{A}}(w)$.

Przykład 14.

W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ mamy bazę kanoniczną $\mathcal{E}_2 = (e_1, e_2) = ((1,0),(0,1))$ oraz np. bazę $B = (v_1, v_2) = ((1,1),(-1,1))$.

Macierz zmiany bazy od $\mathcal{E}_2$ do $\mathcal{B}$ to $B = M_{\mathcal{E}_2}(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

W kolumnach tej macierzy są zapisane wektory v_1, v_2 bazy $\mathcal{B}$ wyrażone w „zwykłych" współrzędnych (w bazie kanonicznej).

Macierz zmiany bazy od $\mathcal{B}$ do $\mathcal{E}_2$ to $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}_2) = B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

W kolumnach tej macierzy zapisane są wektory e_1, e_2 z bazy $\mathcal{E}_2$ wyrażone w bazie $\mathcal{B}$.

Z pierwszej kolumny odczytujemy: $e_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$,

z drugiej kolumny odczytujemy: $e_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$.

Jeśli chcemy wiedzieć, jak wyraża się jakiś wektor w bazie B, możemy skorzystać ze stw. 2.
Na przykład wyrazimy wektor $w = (5,1)$ w bazie $\mathcal{B}$.

Mamy $M_{\mathcal{E}_2}(w) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, stąd $M_{\mathcal{B}}(w) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}_2) \cdot M_{\mathcal{E}_2}(w) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$,

więc $w = (3,-2)_{\mathcal{B}} = 3v_1 - 2v_2$ (współrzędne w bazie $\mathcal{B}$).