Macierze

Niech $\mathbb{K}$ będzie ustalonym ciałem, $m, n \in \mathbb{N}$.

Def. **Macierzą** o wymiarach m na n nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy funkcję
$A : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to \mathbb{K}, \quad (i, j) \mapsto a_{ij} \in \mathbb{K}$

Wartości funkcji A nazywamy **wyrazami** macierzy.
Wartość, którą funkcja A przyporządkowuje elementowi (i, j), oznaczamy a_{ij}.
Macierz o wymiarach m na n oznacza się symbolem $[a_{ij}]_{m\times n}$
(ewentualnie przez $[a_{ij}]$ jeśli to nie prowadzi do nieporozumień).

Macierz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ przedstawia się w postaci tablicy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierz $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix}$ nazywa się **i-tym wierszem** macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$,

zaś **j-tą kolumną** macierzy A nazywamy macierz $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

Symbolem $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ oznaczamy zbiór macierzy o wymiarach $m \times n$ i elementach z ciała $\mathbb{K}$.

Def. Macierz, której wszystkie wyrazy sa równe 0 nazywamy **macierzą zerową** i oznaczamy symbolem $\mathbf{0}$ (lub $\mathbf{0}_{m\times n}$).

Def. Macierz A o wymiarach $n \times n$ nazywamy **macierzą kwadratową** (stopnia n).
Ciąg $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ nazywamy wtedy **główną przekątną** macierzy A (lub **diagonalą**).

Przykład 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 14 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \qquad B = \begin{bmatrix} \mathbf{1+j} & 3 & \pi \\ -3 & \mathbf{4} & 2j \\ 5 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{C})$$

$$\begin{bmatrix} 8j \end{bmatrix} \in M_{1\times 1}(\mathbb{C}) \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2j \end{bmatrix} \in M_{1\times 2}(\mathbb{C}) \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 \\ 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2\times 2} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Przykład 2.

- Macierz **trójkątna górna** to taka macierz kwadratowa, która wszystkie wyrazy poniżej diagonali ma równe 0

  Na przykład $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

- Macierz **trójkątna dolna** to taka macierz kwadratowa, która wszystkie wyrazy powyżej diagonali ma równe 0

  Na przykład $\begin{bmatrix} j & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & -j & 0 \end{bmatrix}$

- Macierz **diagonalna** to taka macierz kwadratowa, ozn. $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})$, która ma wszystkie wyrazy poza diagonalą równe 0.

  Na przykład $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 2j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(2j, 0)$

- Macierz **jednostkowa**, ozn. I lub I_n ma 1 na diagonali, a poza nią same zera.

  Na przykład $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

W zbiorze $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definiuje się działania

dodawanie macierzy: $\quad [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

oraz **mnożenie macierzy przez skalar** $\alpha \in \mathbb{K}$: $\quad \alpha \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}$.

Przykład 3.

Dodawanie: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Mnożenie przez skalar: $-2j \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3j & -4 \\ j & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4j & 6 & 8j \\ 2 & 0 & -6j \end{bmatrix}$

Uwaga: Można dodawać tylko macierze takiego samego wymiaru.

Suma macierzy trójkątnych górnych (dolnych) będzie macierzą trójkątną górną (dolną).

Tw. Dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ i dowolnych skalarów $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ zachodzą następujące równości:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
4. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
5. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$

Uwaga: Dla działania dodawania macierzy elementem neutralnym jest macierz zerowa.

Dla każdej macierzy $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ istnieje **macierz przeciwna** $-A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, czyli odwrotna względem dodawania $-A = -1 \cdot A = [-a_{ij}]$.

Możemy zdefiniować **odejmowanie macierzy** $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ następująco:
$A - B = A + (-B)$, czyli $[a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$.

Struktura algebraiczna $(M_{m\times n}(\mathbb{K}), +)$ jest grupą przemienną.

Struktura algebraiczna $((M_{m\times n}(\mathbb{K}), +), \mathbb{K}, \cdot)$ jest przestrzenią liniową wymiaru $m{\cdot}n$ nad ciałem $\mathbb{K}$.

Def. **Iloczynem** macierzy $[a_{ik}]_{m\times p} \cdot [b_{kj}]_{p\times n}$ nazywamy macierz $[c_{ij}]_{m\times n}$, taką że

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \text{dla } i \in \{1, ..., m\},\ j \in \{1, ..., n\}.$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \underline{b_{1j}} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & \underline{b_{2j}} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & \underline{b_{pj}} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{a_{i1}} & \underline{a_{i2}} & \dots & \underline{a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \underline{\mathbf{c_{ij}}} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = A \cdot B \end{array}$$

Uwaga: Mnożenie macierzy $A \cdot B$ jest wykonalne, jeśli macierz A ma tyle kolumn, ile wierszy ma macierz B.

Przykład 4. Wykonamy mnożenie macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Mnożenie

$$\begin{array}{cc} A \cdot B & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\cdot 1 - 2\cdot 2 + 2\cdot 3 & 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 1\cdot 3 \\ 1\cdot 2 - 2\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 1\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Mnożenie

$$\begin{array}{cc} B \cdot A & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 3\cdot 1 - 1\cdot 2 \\ 1\cdot(-2) + 2\cdot 3 & 2\cdot(-2) + 1\cdot 3 & 3\cdot(-2) - 1\cdot 3 \\ 1\cdot 2 + 2\cdot 1 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 & 3\cdot 2 - 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & -9 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Własności mnożenia macierzy

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ dla $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ B \in M_{n\times p}(\mathbb{K}),\ C \in M_{p\times r}(\mathbb{K})$
2. $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$ dla $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$
3. $\alpha\cdot(A\cdot B) = (\alpha\cdot A)\cdot B = A\cdot(\alpha\cdot B)$ dla $\alpha \in \mathbb{K},\ A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ dla $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$
5. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ dla $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K}), C \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$

Uwaga: Mnożenie macierzy nie jest przemienne (przykład 4).

Przykład 5. Istnieją macierze niezerowe,których iloczyn jest macierzą zerową np.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uwaga: Dla mnożenia macierzy przez skalar λ zachodzi równość

$$\lambda \cdot \left[a_{ij}\right]_{n\times n} = \lambda \cdot I_n \cdot \left[a_{ij}\right]_{n\times n} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$$

Potęgowanie macierzy kwadratowych

Jeśli A jest macierzą kwadratową, to istnieje iloczyn n czynników $A \cdot A \cdot ... \cdot A \overset{ozn.}{=} A^n$.

Def. **Macierzą transponowaną** macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy macierz $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$, gdzie $b_{ij} = a_{ji}$ dla dowolnych $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ...n\}$.

Uwaga. Macierz transponowana A^T jest to macierz, której kolumnami są wiersze macierzy A, natomiast wierszami – kolumny macierzy A.

Przykład 6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Własności transpozycji macierzy

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$ dla $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$
2. $(A^T)^T = A$ dla $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ dla $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ dla $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$

Macierz odwrotna do danej macierzy kwadratowej

Def. **Macierzą odwrotną** do macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ nazywamy taką macierz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, że

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n. \quad (ozn.\ \ B = A^{-1})$$

Jeśli istnieje macierz odwrotna do macierzy A, to jest ona wyznaczona jednoznacznie, zaś A nazywamy macierzą **odwracalną**.

Uwaga: Nie każda macierz kwadratowa jest odwracalna.

Własności

1. Jeśli A jest macierzą odwracalną, to $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Jeśli A jest macierzą odwracalną, to A^T jest macierzą odwracalną i $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3. Jeśli $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ są macierzami odwracalnymi, to $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą eliminacji:

Zapisujemy macierz $[A|I]$

(z prawej stony macierzy A dopisujemy macierz jednostkową I, takiego wymiaru jak A).

Następnie wykonujemy serię operacji na wierszach macierzy $[A|I]$, tak aby uzyskać macierz postaci $[I|B]$ (macierz jednostkowa ma powstać w miejscu macierzy A).

Jeśli uzyskamy taką postać macierzy, to wtedy macierz $B = A^{-1}$.

Schemat postępowania: $[A|I] \xrightarrow{\text{operacje na wierszach}} [I|A^{-1}]$

Możemy wykonywać następujące operacje na wierszach przekształcanej macierzy $[A|I]$:

- mnożenie wiersza przez skalar różny od zera $(\alpha \cdot w_i)$,
- dodawanie do wiersza wielokrotności innego wiersza $(w_i + \alpha \cdot w_j)$,
- zamiana wierszy miejscami $(w_i \longleftrightarrow w_j)$.

Przykład 7. Wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1:3} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 \cdot 3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1-\frac{4}{3}w_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] = [I_2|A^{-1}]$$

Inna sekwencja operacji na wierszach:

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1-w_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1-w_2}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] = [I_2|A^{-1}]$$

Przykład 8. Spróbujemy wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$.

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2+2w_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

W lewej macierzy pojawił się wiersz samych zer. W takiej sytuacji nie będzie możliwe uzyskanie macierzy postaci $[I_2|A^{-1}]$. Oznacza to, że macierz A jest nieodwracalna.