Relacje binarne (dwuargumentowe)

Relację dwuargumentową zazwyczaj rozumiemy jako sposób łączenia elementów pewnego zbioru w pary uporządkowane.

Formalnie relację określamy następująco:

Niech X będzie niepustym zbiorem.
Jeśli $R \subseteq X \times X$ to mówimy, że R jest **relacją w zbiorze** X.
Zamiast pisać $(x, y) \in R$ będziemy stosować zapis xRy.

Przykład 1. Przykładowe relacje w zbiorze $\mathbb{N}$:

a) $xR_1y \;\Leftrightarrow\; x = y$;

b) $xR_2y \;\Leftrightarrow\; x \neq y$;

c) $xR_3y \;\Leftrightarrow\; x \leqslant y$;

d) $xR_4y \;\Leftrightarrow\; x < y$;

e) $xR_5y \;\Leftrightarrow\; x + y = 100$;

f) $xR_6y \;\Leftrightarrow\; x|y$ (x jest dzielnikiem liczby y);

g) $xR_7y \;\Leftrightarrow\; 10|(x - y)$ (x i y mają taką samą cyfrę jedności).

Przykład 2. Przykładowe relacje w zbiorze osób mieszkających obecnie w Polsce:

a) $AS_1B \;\Leftrightarrow$ osoba A jest bratem osoby B;

b) $AS_2B \;\Leftrightarrow$ osoba A jest młodsza od osoby B (osoba A urodziła się co najmniej 5 minut później niż osoba B);

c) $AS_3B \;\Leftrightarrow$ osoby A i B urodziły się w odstępie czasu nieprzekraczającym 365 dni;

d) $AS_4B \;\Leftrightarrow$ osoby A i B urodziły się w tym samym roku kalendarzowym;

e) $AS_5B \;\Leftrightarrow$ osoba A i osoba B mają tę samą matkę;

f) $AS_6B \;\Leftrightarrow$ osoba A i osoba B mają wspólnego dziadka.

Własności relacji

Def. Relację R w zbiorze X nazywamy

zwrotną,	gdy $\forall x \in X \; xRx$
symetryczną,	gdy $\forall x, y \in X \; (xRy \Rightarrow yRx)$
antysymetryczną,	gdy $\forall x, y \in X \; (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$
spójną,	gdy $\forall x, y \in X \; (xRy \vee yRx \vee x = y)$
przechodnią,	gdy $\forall x, y, z \in X \; (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$

Przykład 3.

Relacje zwrotne: równość obiektów, zawieranie zbiorów, słaba nierówność dla liczb rzeczywistych, podzielność liczb, przystawanie figur, podobieństwo figur oraz relacje $R_1, R_3, R_6, R_7, S_3, S_4, S_5, S_6$ z przykładów 1. i 2.

Relacje symetryczne: równość obiektów, prostopadłość i równoległość prostych, przystawanie figur, podobieństwo figur oraz relacje $R_1, R_2, R_5, R_7, S_3, S_4, S_5, S_7$ z przykładów 1. i 2.
Relacja S_1 nie jest symetryczna, bo np. Adam jest bratem Beaty, a Beata nie jest bratem Adama.

Relacje antysymetryczne: równość obiektów, nierówność słaba lub ostra dla liczb rzeczywistych, zawieranie zbiorów, podzielność liczb oraz relacje R_1, R_3, R_3, S_2 z przykładów 1. i 2.
Relacja $<$ jest relacją antysymetryczną, bo implikacja $[(x < y \;\wedge\; y < x) \;\Rightarrow\; x = y]$ jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych (poprzednik jest fałszywy).

Relacje spójne: nierówność słaba i ostra w zbiorze liczb.
Relacja S_2 raczej nie jest spójna, bo pewnie znalazłyby się dwie osoby urodzone w odstępie mniejszym niż 5 minut.

Relacje przechodnie: równość obiektów, nierówność słaba i ostra, podzielność liczb, zawieranie zbiorów, przystawanie figur, podobieństwo figur, równoległość prostych oraz relacje $R_1, R_3, R_4, R_6, R_7, S_2, S_4, S_5$ z przykładów 1. i 2.
Relacja S_3 nie jest przechodnia, bo możemy wziąć po uwagę np. osoby: A, osobę B urodzoną 300 dni później niż osoba A oraz osobę C urodzoną 300 dni później niż osoba B. Mamy wtedy AS_3B oraz BS_3C, ale nie zachodzi AS_3C.

Relacja S_6 nie jest przechodnia. Możemy wziąć pod uwagę parę osób A i B mających wspólnego dziadka oraz parę B i C mających wspólnego innego dziadka, który nie jest dziadkiem osoby A.

Uwaga: Jedyna relacja, która jest jednocześnie symetryczna i antysymetryczna,
to relacja równości obiektów.

Uwaga: Pojęcie relacji binarnej można uogólnić na przypadek dwóch niekoniecznie równych zbiorów X i Y. Wtedy każdy podzbiór $R \subseteq X \times Y$ jest relacją binarną.
Szczególnym przypadkiem relacji binarnej w $X \times Y$ jest funkcja $f : X \to Y$.

Relacja równoważności

Def. Relację ϱ w zbiorze X nazywamy **relacją równoważności**,
jeśli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Uwaga: Relacje równoważności pozwalają utożsamiać (grupować) obiekty charakteryzujące się jednakową wybraną cechą.

Przykład 4. Przykładowe relacje równoważności:

a) Relacja równości obiektów w pewnym zbiorze X.

b) Relacje R_1, R_7, S_4, S_5 z przykładów 1. i 2.

c) Poza tym np. relacja równoległości prostych na płaszczyźnie, relacja przystawania figur oraz relacja podobieństwa figur.

d) W zbiorze podzbiorów pewnego zbioru n-elementowego relacja:

$A \varrho B \Leftrightarrow A$ i B mają tyle samo elementów.

e) W zbiorze liczb całkowitych relacja $k \sim_p n \;\Leftrightarrow\; p|(k-n)$,
gdzie p jest ustaloną liczbą naturalną $p \geqslant 2$.
Sprawdzenie, że relacja $\sim_p$ jest relacją równoważności:
(i) zwrotność: $k \sim_p k$ oznacza, że $p|(k-k)$, co zachodzi dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$.
(ii) symetryczność: Warunek $k \sim_p n$ oznacza, ża liczba $k-n$ jest wielokrotnością liczby p. Jeśli tak jest, to liczba $-(k-n) = n-k$ też jest wielokrotnością liczby p, a to oznacza, że $n \sim_p k$.
(iii) przechodniość: Jeśli zachodzi $k \sim_p n$ oraz $n \sim_p l$, czyli obie liczby: $k-n$ oraz $n-l$ są wielokrotnościami p, to również ich suma $k-n+n-l = n-l$ jest wielokrotnością p, co oznacza, że $k \sim_p l$.

Dwie liczby k i n są w relacji $\sim_p$, gdy mają taką samą resztę z dzielenia przez p.

Relację $\sim_p$ nazywamy relacją przystawania modulo p.

f) W zbiorze $X \neq \emptyset$ relacja $\sim_f$ określona za pomocą funkcji $f : X \to Y$

$$x_1 \sim_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Sprawdzenie, że relacja $\sim_f$ jest relacją równoważności:

(i) zwrotność: $x \sim_f x$ oznacza, że $f(x) = f(x)$, co zachodzi dla każdego $x \in X$;

(ii) symetryczność: jeśli $x_1 \sim_f x_2$, czyli $f(x_1) = f(x_2)$, to oczywiście $f(x_2) = f(x_1)$ (co wynika z symetryczności relacji $=$), a to z kolei oznacza, że $x_2 \sim_f x_1$.

Wynikanie prawdziwe dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$.

(iii) przechodniość: jeśli $x_1 \sim_f x_2$ i $x_2 \sim_f x_3$, czyli $f(x_1) = f(x_2)$ i $f(x_2) = f(x_3)$, to z przechodności relacji $=$ mamy $f(x_1) = f(x_3)$, czyli $x_1 \sim_f x_3$.

Wynikanie prawdziwe dla dowolnych $x_1, x_2, x_3 \in X$.

Relacja równoważności określona w zbiorze X pozwala na podział tego zbioru na rozłączne podzbiory - klasy abstrakcji. Podział ten wprowadza się następująco:

jeśli obiekty są w relacji, to należą do tej samej klasy, a obiekty niebędące w relacji należą do różnych klas.

Proces tworzenia klas - przydzielania obiektów do klas nazywamy klasyfikacją.

W matematyce klasyfikacja obiektów jest kluczowa, bo pozwala badać uniwersalne własności obiektów z tej samej klasy oraz daje narzędzia rozróżniania klas.

Jako przykład weźmy zbiór trójkątów na płaszczyźnie i relację podobieństwa trójkątów.

W każdej klasie będą trójkąty podobne do jakiegoś reprezentanta. Takich klas jest nieskończenie wiele, ale możemy wśród nich wyróżnić np. klasę trójkątów równobocznych. Dalej możemy formułować uniwersalne twierdzenia dotyczące wszystkich trójkątów równobocznych, mówiące o takich ich własnościach, które nie zależą ani od ich rozmiaru, ani od położenia na płaszczyźnie.

Def. Niech ϱ będzie relacją równoważności w zbiorze X.

Klasą abstrakcji elementu $x \in X$ względem relacji ϱ nazywamy zbiór

$$[x]_\varrho = \{y \in X : y \varrho x\}.$$

Każdy element $y \in [x]_\varrho$ nazywamy **reprezentantem** tej klasy abstrakcji.

Zbiór wszystkich klas abstrakcji względem relacji ϱ nazywamy **zbiorem ilorazowym** i oznaczamy X/ϱ.

Przykład 5. Wyznaczymy klasy abstrakcji dla wybranych relacji z przykładu 4.

- Dla relacji równości obiektów w zbiorze X.

  Niech $x \in X$, wtedy $[x]_{=} = \{y \in X : \ y = x\} = \{x\}$

  Klasy abstrakcji są jednoelementowe.

  Zbiór ilorazowy ma tyle elementów ile zbiór X.

- Dla relacji S_4 z przykładu 2.

  X - zbiór osób mieszkających obecnie w Polsce.

  $A \ S_4 \ B \ \Leftrightarrow$ osoby A i B urodziły się w tym samym roku kalendarzowym;

  $[A]_{S_4}$ = zbiór osób, które urodziły się w tym samym roku kalendarzowym co osoba A.

  Wiadomo, że zbiór X jest skończony i ograniczony jest wiek osób, więc jest skończona liczba klas, nie większa niż np. 120, jeśli przyjmiemy, że nie ma osoby w wieku 120 lat ani starszej. Aby wiedzieć więcej, trzeba by znać dane na temat liczby osób urodzonych w kolejnych latach od 1900 roku i żyjących w Polsce.

  Można jeszcze przypuszczać, że większość słuchaczy tego przedmiotu należy do tej samej klasy osób urodzonych w 2001 roku.

- Dla relacji przystawania modulo p w zbiorze liczb całkowitych: $k \sim_p n \ \Leftrightarrow \ p|(k-n)$

  Klasa $[0]_{\sim_p} = \{k \in \mathbb{Z} : \ p|(k-0)\} = p\mathbb{Z}$ – zbiór liczb podzielnych przez p.

  Klasa $[1]_{\sim_p} = \{k \in \mathbb{Z} : \ p|(k-1)\} = \{k \in \mathbb{Z} : \ \exists l \in \mathbb{Z} \ \ k = p \cdot l + 1\} = \{p \cdot l + 1 : \ l \in \mathbb{Z}\}$ – zbiór liczb, które mają resztę z dzielenia przez p równą 1.

  Różnych klas dla tej relacji będzie p, bo tyle jest możliwych reszt z dzielenia przez p : $0, 1, 2, \ldots, p-1$.

  Do tej samej klasy należą liczby, które mają taką samą resztę z dzielenia przez p.

  Zbiór ilorazowy tej relacji jest p-elementowy, $\mathbb{Z}/_{\sim_p} = \{[0]_{\sim_p}, [0]_{\sim_p}, \ldots, [p-1]_{\sim_p}\}$.

  Wszystkie klasy abstrakcji tej relacji są nieskończone.

- Dla relacji R_7 z przykładu 1.

  Jest to relacja przystawania modulo 10 w zbiorze liczb naturalnych.

  $kR_7n \ \Leftrightarrow \ \ k \sim_{10} n \Leftrightarrow \ 10|(k-n)$ (k i n mają taką samą ostatnią cyfrę).

  Jest 10 różnych klas abstrakcji tej relacji:

  $[1]_{\sim_{10}} = \{10k+1 : \ k \in \mathbb{N}\}, \ [2]_{\sim_{10}} = \{10k+2 : \ k \in \mathbb{N}\}, \ \ldots \ [10]_{\sim_{10}} = \{10k : \ k \in \mathbb{N}\}$.

  Zauważmy, że np. $[1]_{\sim_{10}} = [21]_{\sim_{10}}$, $[7]_{\sim_{10}} = [587]_{\sim_{10}}$.

  Równość klas oznacza, że to są te same zbiory.

  Ta relacja ma szczególne własności, które wykorzystujemy przy dodawaniu i mnożeniu liczb.

  Mianowicie: ostatnia cyfra wyniku dodawania oraz mnożenia liczb naturalnych jest określona przez ostanie cyfry składników (czynników).

Na przykład dla liczb 38576 i 79547 ostatnia cyfra ich sumy to $3 = (6 + 7)_{\text{ mod } 10}$,
a ostatnia cyfra ich iloczynu to $2 = (6 \cdot 7)_{\text{ mod } 10}$.
Nie potrzebujemy dodawać ani mnożyć tych liczb, możemy się skupić na tym co istotne, czyli na ostatnich cyfrach.

Dla obiektów należących do tej samej klasy abstrakcji często stosujemy oznaczenia:
$x \sim y,\ \ x \approx y,\ \ x \equiv y.$

Tw. Jeżeli ϱ jest relacją równoważności w zbiorze X, to:

1. $\forall x \in X\ x \in [x]_\varrho$
2. $\forall x, y \in X\ ([x]_\varrho = [y]_\varrho \Leftrightarrow x\varrho y)$
3. $\forall x, y \in X\ ([x]_\varrho \neq [y]_\varrho \Rightarrow [x]_\varrho \cap [y]_\varrho = \emptyset)$

Def. Rodzinę $\{A_i : i \in I\}$ podzbiorów zbioru X nazywamy **podziałem zbioru** X, jeśli spełnione są następujące warunki:

1. $\forall i \in I\ A_i \neq \emptyset$
2. $\forall i, j \in I\ (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$
3. $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = X.$

Podział zbioru X to inaczej wybór takich niepustych, parami rozłącznych podzbiorów tego zbioru, których suma jest całym zbiorem X.

Tw. Jeśli ϱ jest relacją równoważności w zbiorze X to zbiór X/ϱ jest podziałem zbioru X.
Ponadto jeśli rodzina $\{A_i : i \in I\}$ jest podziałem zbioru X, to relacja ϱ taka, że dla dowolnych $x, y \in X\ x\varrho y \Leftrightarrow \exists i \in I\ (x \in A_i \wedge y \in A_i)$ jest relacją równoważności w zbiorze X.

Twierdzenie powyższe mówi, że każda relacja równoważności w zbiorze X definiuje podział tego zbioru. Elementami tego podziału są klasy abstrakcji tej relacji.

Ponadto relacja równoważności może być zdefiniowana tak, by była "zgodna" z danym podziałem zbioru.

Przykład 6.

a) Czy istnieje w zbiorze liczb naturalnych taka relacja równoważności, która ma skończoną liczbę klas abstrakcji i wszystkie te klasy są skończone?

Pytanie o istnienie relacji równoważności możemy zastąpić pytaniem o istnienie odpowiedniego podziału zbioru $\mathbb{N}$: Czy można zbiór $\mathbb{N}$ zapisać jako sumę skończonej liczby zbiorów skończonych?

Nie jest to możliwe, bo suma skończonej liczby zbiorów skończonych jest zbiorem skończonym, a zbiór $\mathbb{N}$ jest zbiorem nieskończonym.

b) Czy istnieje w zbiorze liczb naturalnych taka relacja równoważności, która ma nieskończenie wiele klas abstrakcji i wszystkie te klasy są skończone?

Problem równoważny: czy można zdefiniować podział zbioru $\mathbb{N}$ na nieskończenie wiele rozłącznych skończonych podzbiorów?

Można. Na przykład podział na podzbiory jednoelementowe.

Inna możliwość: tworzymy podzbiory 2-elementowe postaci $A_k = \{2k-1, 2k\}$ i mamy wtedy $\mathbb{N} = \{1,2\} \cup \{3,4\} \cup \ldots \cup \{2k-1, 2k\} \cup \ldots$.

Mając taki podział możemy zdefiniować odpowiadającą mu relację równoważności:

$m \sim n \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{N} \;\; (m \in \{2k-1, 2k\} \;\wedge\; n \in \{2k-1, 2k\})$,

czyli dwie liczby są w relacji, gdy należą do tego samego "kawałka" podziału.

Istnieją oczywiście inne możliwości podziału zbioru $\mathbb{N}$ na nieskończenie wiele parami rozłącznych skończonych podzbiorów, a co za tym idzie można odpowiednio inaczej zdefiniować odpowiadające temu podziałowi relacje równoważności.