

TEORIA MNOGOŚCI

Teoria mnogości to dział matematyki zajmujący się badaniem ogólnych własności zbiorów niezależnie od natury elementów, z których się składają. Twórcą tej teorii był matematyk niemiecki Georg Cantor (1845 - 1918).

Pojęcia pierwotne teorii mnogości to **zbiór** oraz bycie **elementem** zbioru.

Stosujemy następujące zapisy:

$x \in A$ — x jest elementem zbioru A ; $x \notin A$ — x nie należy do zbioru A

Definiujemy następujące podstawowe pojęcia:

- \emptyset — **zbiór pusty** (nie ma żadnego elementu, $\forall x x \notin \emptyset$)
- Relacja **inkluzji** (zawierania) — $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$ (A jest podzbiorem B)
Symbole \subseteq i \subset traktować będziemy równoważnie.
- **Równość zbiorów** — $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

Uwaga: Zbiór pusty jest tylko jeden i jest on podzbiorem każdego zbioru.

Uwaga: Dla dowolnego zbioru A zachodzi $A \subseteq A$ oraz $\emptyset \subseteq A$.

Dla dowolnych zbiorów A , B i C zachodzi implikacja $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$.

Inkluzja właściwa $A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$.

Gdy $A \subsetneq B$, mówimy, że A jest podzbiorem właściwym zbioru B .

Sposoby definiowania zbiorów:

1. Wypisanie elementów zbioru, np. $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Uwaga: Przy wypisywaniu elementów zbioru nie jest ważna ich kolejność, ani wielokrotne pojawienie się np.

$\{a, b\} = \{b, a\} = \{b, b, a, b, a\}$ – to ten sam zbiór, który ma dwa różne elementy a i b .

Elementami zbioru mogą być zbiory, elementy mogą być obiektami różnego typu.

Przykład 1. $A = \{\emptyset, 1, 3, \{1, 2\}\}$

Zbiór A ma 4 elementy.

Zachodzą dla niego np. relacje:

$1 \in A$, $1 \notin A$, $\{3\} \notin A$, $\{3\} \subseteq A$, $2 \notin A$, $2 \not\subseteq A$, $\{2\} \notin A$, $\{2\} \not\subseteq A$,
 $\{1, 3\} \subseteq A$, $\{1, 3\} \notin A$, $\{1, 2\} \not\subseteq A$, $\{1, 2\} \in A$, $\emptyset \in A$, $\emptyset \subseteq A$, $\{\emptyset\} \subseteq A$.

Uwaga: $\{\emptyset\} \neq \emptyset$; $\{\emptyset\}$ jest zbiorem 1-elementowym, którego elementem jest \emptyset .

2. Określenie zbioru za pomocą funkcji zdaniowej — gromadzenie elementów mających wspólną cechę opisaną pewną funkcją zdaniową. Ogół elementów $x \in X$, które mają własność $W(x)$ oznaczamy $\{x \in X : W(x)\}$.

Przykład 2.

a) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty)$;

b) $\{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} n = 2k\} = 2\mathbb{Z}$ — zbiór liczb całkowitych parzystych.

3. Zbiór jako obraz zbioru wyznaczony przez funkcję — $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ (więcej na wykładzie o funkcjach).

Przykład 3.

a) $\{2k : k \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$ — zbiór liczb całkowitych parzystych,

b) $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ — zbiór kwadratów liczb naturalnych.

Podstawowe działania na zbiorach

Wyróżniamy trzy podstawowe działania dwuargumentowe na zbiorach.

Sumę zbiorów A i B definiujemy jako

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Jest to zbiór składający się ze wszystkich elementów zbioru A , wszystkich elementów zbioru B i niezawierający żadnych innych elementów.

Iloczyn lub **przecięcie** lub **część wspólną** zbiorów A i B definiujemy jako

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Jest to zbiór składający się z elementów zbioru A , które są jednocześnie elementami zbioru B .

Różnicę zbiorów A i B definiujemy jako

$$A \setminus B = A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Jest to zbiór składający się ze wszystkich tych elementów zbioru A , które nie są elementami zbioru B .

Uwaga: Następujące warunki są równoważne:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$$

Przykład 4. Niech

$$A = \mathbb{N} \cap ((-5, 3) \cup (7, 8)), \quad B = (\mathbb{N} \cap (-5, 3)) \cup (7, 8), \quad C = \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{1, 4, \{\emptyset\}\}.$$

Wtedy

$$A = \{1, 2\};$$

$$B = \{1, 2\} \cup (7, 8);$$

$$C = \{\emptyset, 1, 4, \{\emptyset\}\};$$

$$B \cup C = \{\emptyset, 1, 2, 4, \{\emptyset\}\} \cup (7, 8);$$

$$A \setminus (B \cup C) = \emptyset, \text{ czyli } A \subseteq (B \cup C).$$

W zastosowaniach teorii zbiorów ograniczamy się na ogół do rozważania tylko takich zbiorów, które są podzbiorem pewnego ustalonego zbioru zwanego **przestrzenią (uniwersum)**.

Niech X będzie ustaloną przestrzenią.

Dopełnieniem zbioru $A \subseteq X$ nazywamy zbiór $A' = X \setminus A$.

Dopełnienie zbioru zależy od uniwersum.

Przykład 5. Niech $A = \{1\}$.

a) Dla $X = \mathbb{N}$ $A' = \mathbb{N} \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, \dots\};$

b) Dla $X = \mathbb{R}$ $A' = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty);$

c) Dla $X = \{0, 1\}$ $A' = \{0\}.$

Własności działań na zbiorach

A, B, C - dowolne zbiory

1. $A \cup \emptyset = A$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cup A = A$ $A \cap A = A$ idempotentność
3. $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$ przemienność
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ łączność
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ rozdzielność
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ prawa de Morgana
 $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Własności dopełnienia

$$X' = \emptyset \qquad \emptyset' = X$$

$$A \cup A' = X \qquad A \cap A' = \emptyset \qquad (A')' = A$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \qquad (A \cap B)' = A' \cup B' \qquad \text{prawa de Morgana}$$

Zbiór potęgowy $2^X = \{A : A \subseteq X\}$ (składa się z wszystkich podzbiorów danego zbioru)

Uwaga: $\emptyset \in 2^X$ i $X \in 2^X$ dla dowolnego zbioru X .

Uwaga: Jeśli zbiór X ma $n \in \mathbb{N}$ elementów, to zbiór 2^X ma 2^n elementów.

Przykład 6.

a) Dla $A = \{1, 2, 3\}$ mamy $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;

b) Dla $A = \{a\}$ mamy $2^A = \{\emptyset, \{a\}\}$;

c) Dla $A = \emptyset$ mamy $2^A = \{\emptyset\}$.

Produkt – iloczyn kartezjański zbiorów

Symbolem (x, y) oznaczamy **uporządkowaną parę** elementów x i y .

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2.$$

Uwaga. $(x, y) = (y, x) \Leftrightarrow x = y$

Def. **Iloczynem kartezjańskim zbiorów** X i Y nazywamy zbiór

$$X \times Y = \begin{cases} \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\} & \text{jeśli } X \neq \emptyset \text{ i } Y \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{jeśli } X = \emptyset \text{ lub } Y = \emptyset \end{cases}$$

Stosujemy oznaczenie $X \times X = X^2$.

Uwaga. Jeżeli X, Y - niepuste zbiory oraz $X \neq Y$ to $X \times Y \neq Y \times X$.

Uwaga. Jeżeli zbiór X ma $n \in \mathbb{N}$ elementów, zbiór Y ma $m \in \mathbb{N}$ elementów, to zbiór $X \times Y$ ma $n \cdot m$ elementów.

Przykład 7.

a) Niech $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$. Wtedy

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}, \quad B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

b) Niech $A = (1, 2)$, $B = [0, 3]$. Wtedy

$A \times B = (1, 2) \times [0, 3] = \{(x, y) : 1 < x < 2 \wedge 0 \leq y \leq 3\}$ – prostokąt na płaszczyźnie bez boków pionowych.

c) Niech $A = \{1, 2\}$, $B = [0, 3)$. Wtedy

$A \times B = \{1, 2\} \times [0, 3) = \{(x, y) : (x = 1 \vee x = 2) \wedge y \in [0, 3)\}$ – dwa pionowe odcinki na płaszczyźnie bez górnych końców.

Uwaga. Dla dowolnych zbiorów X, Y, Z zachodzi równość

$$X \times (Y \diamond Z) = (X \times Y) \diamond (X \times Z),$$

gdzie \diamond oznacza \cup , \cap lub \setminus .

Uogólnienie - produkt skończonej liczby zbiorów

Podobnie jak pary uporządkowane można zdefiniować n -elementowe układy (a_1, a_2, \dots, a_n) jako obiekty rozróżniające swoje kolejne współrzędne.

Niech X_1, X_2, \dots, X_n - zbiory niepuste ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$), wtedy definiujemy

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in X_1 \wedge \dots \wedge x_n \in X_n\}$$

W przypadku gdy zbiory się powtarzają stosujemy oznaczenie

$$\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ razy}} = X^n$$

Podstawowym zbiorem, który będzie modelem dla wielu pojęć na tym wykładzie jest n -wymiarowa przestrzeń rzeczywista

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ dla } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Szczególne przykłady to:

\mathbb{R}^2 – model płaszczyzny, \mathbb{R}^3 – model 3-wymiarowej przestrzeni.

Indeksowane rodziny zbiorów, uogólnione sumy i iloczyny rodzin zbiorów

Niech $X \neq \emptyset$, $T \neq \emptyset$.

Def. **Indeksowaną rodziną podzbiorów** zbioru X nazywamy funkcję $f : T \rightarrow 2^X$.

Elementy zbioru T nazywamy **indeksami**.

Funkcja f przyporządkowuje każdemu indeksowi $t \in T$ pewien zbiór.

Oznaczmy go przez A_t . $A_t \subseteq X$.

Indeksowaną rodzinę zbiorów oznaczać będziemy przez $(A_t)_{t \in T}$.

Mówimy, że zbiór A_t należy do rodziny $(A_t)_{t \in T}$ (jest elementem tej rodziny).

Przykład 8.

Niech $X = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{N}$, $A_t = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{t} \leq x \leq t\}$.

Elementami tej rodziny są przedziały domknięte $[\frac{1}{t}, t]$.

Przykładowe zbiory z tej rodziny:

$$A_1 = \{1\},$$

$$A_2 = [\frac{1}{2}, 2],$$

$$A_{10} = [\frac{1}{10}, 10].$$

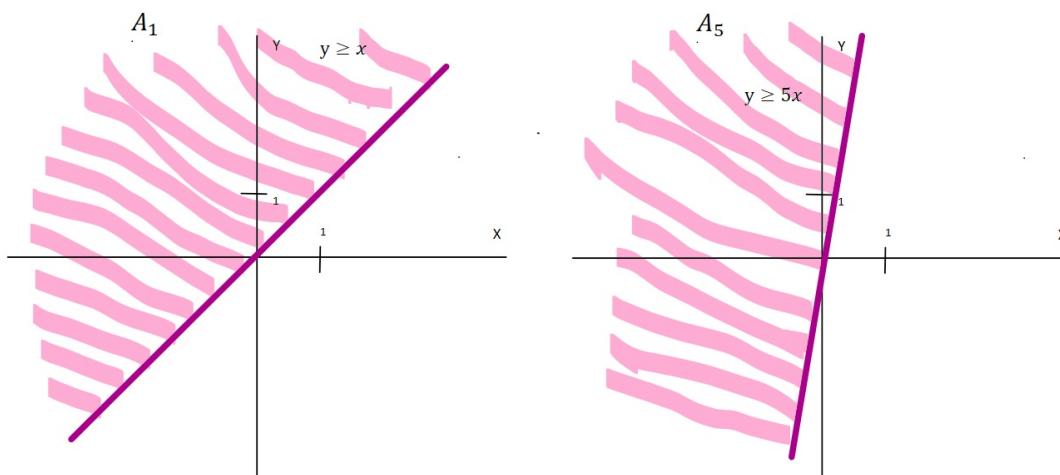
Zauważmy, że dla tej rodziny zachodzi własność $t_1 < t_2 \Rightarrow A_{t_1} \subseteq A_{t_2}$,

czyli zbiory z mniejszymi indeksami są podzbiorem zbiorów z większymi indeksami.

Rodzinę o takiej własności nazywamy rodziną **wstępującą**.

Przykład 9.

Niech $X = \mathbb{R}^2$, $T = \mathbb{N}$, $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq t \cdot x\}$.



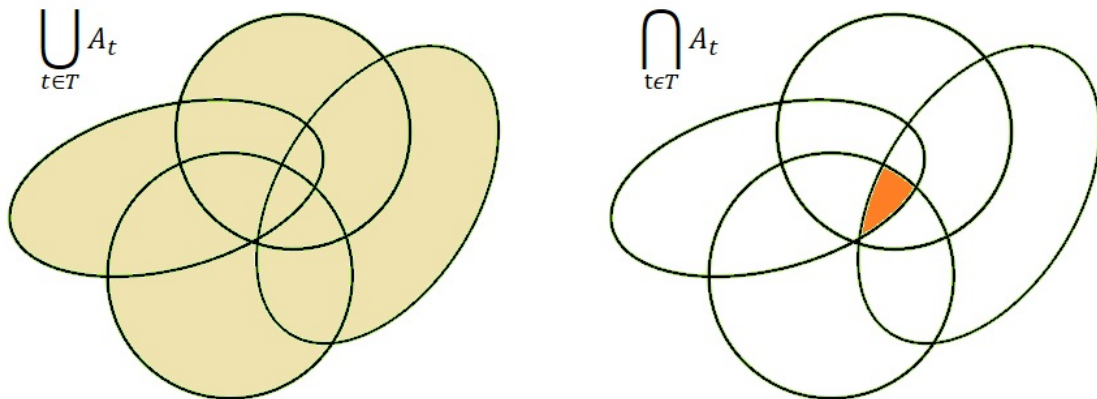
Niech $(A_t)_{t \in T}$ - dowolna indeksowana rodzina podzbiorów zbioru X .

Def. **Uogólnioną sumą zbiorów** $A_t, t \in T$ nazywamy zbiór

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \{x \in X : \exists t \in T x \in A_t\}.$$

Def. **Uogólnionym iloczynem (przecięciem) zbiorów** $A_t, t \in T$ nazywamy zbiór

$$\bigcap_{t \in T} A_t = \{x \in X : \forall t \in T x \in A_t\}.$$



Uwaga: W przypadku gdy zbiór $T \subseteq \mathbb{N}$ jest zbiorem $T = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ stosowane są oznaczenia:

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_n.$$

Uwaga: Własności uogólnionej sumy i iloczynu można zapisać następująco:

$$x \in \bigcup_{t \in T} A_t \Leftrightarrow \exists t \in T x \in A_t, \quad x \in \bigcap_{t \in T} A_t \Leftrightarrow \forall t \in T x \in A_t$$

Uogólniona suma rodziny zbiorów jest najmniejszym zbiorem zawierającym wszystkie zbiory tej rodziny.

Uogólniony iloczyn rodziny zbiorów jest największym zbiorem zawartym w każdym zbiorze tej rodziny.

Przykład 10.

Wyznaczyć uogólnioną sumę oraz iloczyn rodziny zbiorów z przykładu 8.

Dla rodziny przedziałów $A_t = [\frac{1}{t}, t]$, $T = \mathbb{N}$ mamy $\bigcup_{t \in T} A_t = (0, +\infty)$,

gdyż każda liczba $x \in (0, +\infty)$ należy do jakiegoś przedziału A_t (wystarczy dobrać odpowiednio duże t);

Z kolei $\bigcap_{t \in T} A_t = \{1\}$, gdyż tylko liczba 1 należy do wszystkich zbiorów A_t .

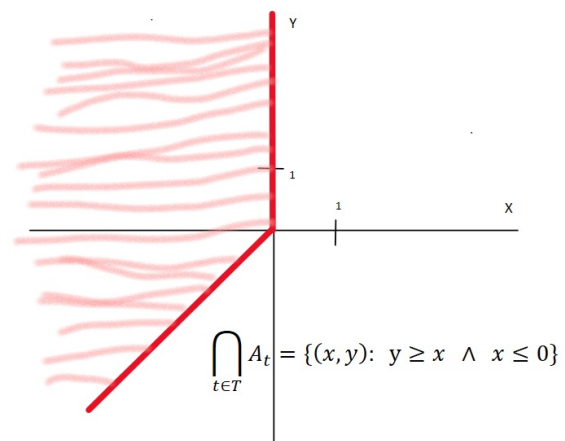
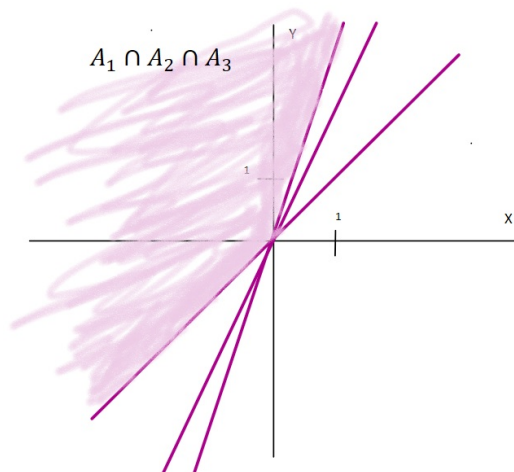
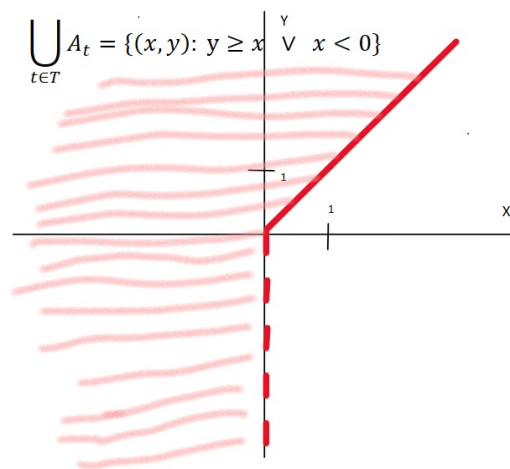
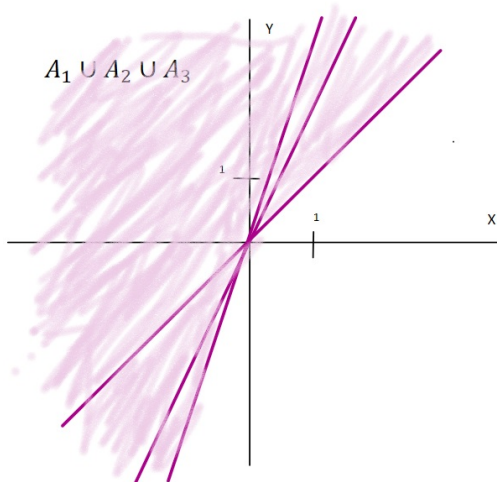
Dla rodziny wstępującej mamy $\bigcap_{t \in T} A_t = A_1$, czyli jest to zbiór z najmniejszym indeksem.

Przykład 11.

Wyznaczyć uogólnioną sumę oraz iloczyn rodziny zbiorów z przykładu 9.

Dla rodziny zbiorów $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq t \cdot x\}$, $T = \mathbb{N}$

mamy rozwiązania przedstawione na poniższych rysunkach.



Własności działań uogólnionych

Tw. Jeżeli $(A_t)_{t \in T}$ jest indeksowaną rodziną podzbiorów zbioru X i $A \subseteq X$, to prawdziwe są następujące zależności:

1. Dla każdego $s \in T$ mamy $A_s \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t$.

2. Dla każdego $s \in T$ mamy $\bigcap_{t \in T} A_t \subseteq A_s$.

3. Jeżeli $S \subseteq T$ to $\bigcup_{t \in S} A_t \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t$ oraz $\bigcap_{t \in S} A_t \supseteq \bigcap_{t \in T} A_t$.

4. Jeżeli istnieją t_1, \dots, t_n takie, że $\forall t \in T \ A_t \subseteq A_{t_1} \cup \dots \cup A_{t_n}$, to

$$\bigcup_{t \in T} (A_t) = A_{t_1} \cup \dots \cup A_{t_n}.$$

5. W szczególności, jeżeli istnieją t_1, \dots, t_n takie, że $A_{t_1} \cup \dots \cup A_{t_n} = X$, to

$$\bigcup_{t \in T} (A_t) = X.$$

6. Jeżeli istnieją t_1, \dots, t_n takie, że $\forall t \in T \ A_{t_1} \cap \dots \cap A_{t_n} \subseteq A_t$, to

$$\bigcap_{t \in T} (A_t) = A_{t_1} \cap \dots \cap A_{t_n}.$$

7. W szczególności, jeżeli istnieją t_1, \dots, t_n takie, że $A_{t_1} \cap \dots \cap A_{t_n} = \emptyset$, to

$$\bigcap_{t \in T} (A_t) = \emptyset.$$

8. Zachodzą prawa de Morgana:

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t \right)' = \bigcap_{t \in T} (A_t)' \quad \text{oraz} \quad \left(\bigcap_{t \in T} A_t \right)' = \bigcup_{t \in T} (A_t)'$$

Przykład 12. Dla rodziny przedziałów $A_t = [2 \cdot (-1)^t, 2 \cdot (-1)^t + \frac{5}{t}]$, $t \in \mathbb{N}$ wyznaczyć jej uogólnioną sumę i przecięcie.

$$\begin{aligned} A_1 &= [-2, 3], & A_2 &= [2, 4\frac{1}{2}], \\ A_3 &= [-2, -\frac{1}{3}], & A_4 &= [2, 3\frac{1}{4}], \\ A_5 &= [-2, -1], & A_6 &= [2, 2\frac{5}{6}], \dots \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla zbiorów z indeksami parzystymi mamy $A_{2k} \subseteq A_2 = [2, 4\frac{1}{2}]$, zaś dla zbiorów z indeksami nieparzystymi mamy $A_{2k-1} \subseteq A_1 = [-2, 3]$.

Stąd dla każdego $t \in \mathbb{N}$ mamy $A_t \subseteq A_1 \cup A_2$.

Korzystając z własności 4. dostaniemy $\bigcup_{t \in \mathbb{N}} A_t = A_1 \cup A_2 = [-2, 4\frac{1}{2}]$.

Zauważmy, że $A_2 \cap A_3 = \emptyset$, stąd $\bigcap_{t \in \mathbb{N}} A_t = \emptyset$ (własność 7).