**MATEMATYKA KONKRETNA 1** $\quad Z_{12}$

1. Sprawdzić, czy dana funkcja jest przekształceniem liniowym.
 a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi((x,y)) = (y, xy, x-y)$
 b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi((x,y,z)) = (x-3, 0, y-z)$
 c) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi$ – symetria względem prostej o równaniu $y = x+1$.

2. Podać macierz przekształcenia $\varphi$ w bazach kanonicznych oraz wyznaczyć bazy jego jądra i obrazu.
 a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi((x,y,z)) = (2z, 3x, x-2z)$
 b) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ $\quad \varphi((x,y)) = (x-2y, 0, 4y-2x, 0)$
 c) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi((x,y,z,t)) = (x-2y, x+2z, x-y+z)$
 d) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ $\quad (\varphi(w))(x) = (x-1)w'(x) - 2w(x)$

3. Dla przekształcenia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określonego wzorem $\varphi((x,y,z)) = (2x-3y, x-y+2z)$
 podać macierze: $M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}(\varphi)$, $M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{A}}(\varphi)$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}(\varphi)$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$,
 gdzie baza $\mathcal{A} = ((1,0,-3),(0,1,-2),(0,1,3))$, $\mathcal{B} = ((3,2),(5,3))$.

4. Uzasadnić, że istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\varphi$, które spełnia podane warunki.
 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi((0,4,0)) = (4,0,-8)$, $\quad \varphi((-1,1,0)) = (0,0,0)$, $\quad \varphi((2,1,1)) = (1,0,-2)$.
Jaki jest rząd tego przekształcenia? Wyznaczyć $\operatorname{Im}\varphi$ oraz $\operatorname{Ker}\varphi$ podając bazy tych przestrzeni.

5. Dana jest macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
w bazach $\mathcal{A} = ((2,-1),(-1,1))$, $\quad \mathcal{B} = ((3,-1,1),(2,0,-3),(1,-1,0))$.
Wyznaczyć macierz przekształcenia $\varphi$ w bazach kanonicznych i podać wzór przekształcenia $\varphi$.
Sprawdzić, czy wektor $(1,2)$ należy do $\operatorname{Ker}\varphi$, a wektor $(1,0,-1)$ należy do $\operatorname{Im}\varphi$.

6. Niech $O_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie obrotem o kąt $\alpha$ wokół punktu $(0,0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.
Wyznaczyć wzór tego przekształcenia oraz jego macierz w bazach kanonicznych.

7. Niech $L$ będzie prostą o równaniu $y = 3x$. Niech $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \psi$ – rzut prostokątny na prostą $L$.
Wyznaczyć jądro i obraz tego przekształcenia.
Niech $B = (v_1, v_2)$ – baza przestrzeni $\mathbb{R}^2$, gdzie $v_1 \in L$, $v_2 \perp L$. Zapisać macierz $M_B^B(\psi)$.
Wyznaczyć macierz $M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(\psi)$ oraz zapisać wzór przekształcenia $\psi$.