MATEMATYKA KONKRETNA 1 $\qquad Z_8$

1. Narysować diagramy poniższych zbiorów uporządkowanych.
   W każdym z nich wskazać elementy wyróżnione oraz łańcuch i antyłańcuch maksymalnej długości. Czy któryś z tych zbiorów jest kratą?

   (a) $(2^{\{1,2,3,4\}} \setminus \{\emptyset, \{1,2,3,4\}\}, \subseteq)$,

   (b) $(\{0,1,2\} \times \{-1,0,1\} \setminus \{(2,1)\}, \leqslant_P)$ $\quad$ ($\leqslant_P$ - porządek produktowy),

   (c) $(\{2,3,4,5,8,10,12,15,50,200\}, |)$,

   (d) $(\#144, |)$, $\#n$ – oznacza zbiór naturalnych dzielników liczby n.

   (e) $(\#30, |)$.

2. Ile dzielników naturalnych mają liczby: 1000000, 3000000, 4000000?

3. Rozważmy zbiór $\mathbb{R}^2$. Poniższe polecenia należy wykonać przyjmując dwa warianty relacji porządku: 1 - porządek produktowy $\leqslant_p$, 2 - porządek leksykograficzny $\leqslant_L$.

   (a) Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$. Wskazać kresy i elementy wyróżnione w A (elementy wyrożnione to: el. minimalne, maksymalne, najmniejszy i największy).

   (b) Niech $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = \sin y, \ y \in [-\pi, 2\pi]\}$. Wyznaczyć kres górny zbioru B - $\sup B$, kres dolny zbioru B - $\inf B$ oraz elementy wyróżnione w B.

   (c) Narysować na płaszczyźnie zbiór w kształcie litery **Ł** (przyjąć, że jest to zbiór trzech odcinków: jeden pionowy, jeden poziomy i jeden skośny). Dla takiego zbioru wyznaczyć (zaznaczyć na rysunku) kresy oraz elementy wyróżnione.

   (d) Narysować na płaszczyźnie zbiór w kształcie $\Longrightarrow$ (przyjąć, że jest to zbiór czterech odcinków: dwa poziome i dwa skośne). Dla takiego zbioru wyznaczyć (zaznaczyć na odpowiednio powiększonym rysunku) kresy oraz elementy wyróżnione.

4. W zbiorze $\mathbb{N}$ określamy relację $\preceq$ wzorem:

$$x \preceq y \Leftrightarrow (2|x \ \wedge \ 2|y \ \wedge \ y \leqslant x) \vee (\neg 2|x \ \wedge \ 2|y) \vee (\neg 2|x \ \wedge \ \neg 2|y \ \wedge \ x \leqslant y).$$

   Wykazać, że $\preceq$ jest częściowym porządkiem. Czy jest to porządek liniowy?
   Czy tak uporządkowany zbiór posiada element najmniejszy? A największy?

5. Niech T będzie zbiorem ciągów $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a $\preccurlyeq$ relacją w T określoną wzorem:

   $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ f(n) \leqslant g(n)$. Udowodnić, że $\preccurlyeq$ jest częściowym porządkiem.
   Wskazać elementy wyróżnione w $(T, \preccurlyeq)$ oraz nieskończony łańcuch i antyłańcuch.

6. Niech A_t dla $t \in \{0,1,2,3,4,5\}$ będzie rodziną zbiorów

   $A_t = \{z \in \mathbb{C} : \ k_t + 1 \leqslant \mathrm{Im} z \leqslant t+2\}$, gdzie $k_t = \begin{cases} 0, & \text{dla } t = 0,2,4; \\ 1, & \text{dla } t = 1; \\ -1, & \text{dla } t = 3,5. \end{cases}$ Sporządzić diagram zbioru uporządkowanego $(\{A_t\}, \subseteq)$.