MATEMATYKA KONKRETNA 1 $\quad Z_7$

1. Sprawdzić, czy dana funkcja $f : X \to Y$ jest różnowartościowa i czy jest na Y.

   (a) $X = \mathbb{N}^2, Y = \mathbb{N}, \quad f(n,m) = 2^n 3^m$;

   (b) $X = \mathbb{N}^2, Y = \mathbb{N}, \quad f(n,m) = 2^n 4^m$;

   (c) $X = \mathbb{R},\ Y = \mathbb{R}^2, \quad f(t) = (t, 1-t)$;

   (d) $X = 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\},\ Y = \mathbb{N} : \quad f(A) = \min(A),\ A \subseteq \mathbb{N}$;

2. Dla funkcji $f : X \to Y$ określić zbiór jej wartości $f(X)$ oraz wyznaczyć funkcję odwrotną do $f : X \to f(X)$.

   (a) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

   (b) $f : [3\pi, 4\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{1-2\cos x}$

3. Dla danych funkcji wyznaczyć obrazy i przeciwobrazy podanych zbiorów. (Wykonać rysunki)

   Rozstrzygnąć, które z nich są injekcjami, a które surjekcjami. (Uzasadnić odpowiedzi)

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = [x] + 1; \quad f^{-1}(\{0\}), \quad f^{-1}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}), \quad f((0, +\infty)), \quad f^{-1}(f([-\pi, \pi]))$;

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \min\{|x|, 2, x+2\} \qquad f((-1, 3]),\ f^{-1}(\{-1, 1, 2\}),\ f^{-1}(f(\{0, 1, 5\}))$

   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (y+2) \cdot \sin x; \quad f((0, \pi] \times \{2\pi\}),\ f^{-1}(\{0\}),\ f^{-1}([0, +\infty))$
   Czy $(1, -1) \in f^{-1}((0,1))$?

   (d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = |y| + x \qquad f(\{0, 1\} \times (-2, 1]), \quad f((-1, 1] \times (-2, 1])$,
   $f^{-1}(\{-2, 1\}), \quad f^{-1}([-2, 1)), \quad f(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)^2 + y^2 = 2\})$;

   (e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = |x+y| \qquad f(\{1\} \times (-2, 1]),\ f^{-1}(\{-2, 1, 4\}), \quad f^{-1}([2, 4))$,
   $f(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)^2 + y^2 = 2\})$;

   (f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f((x,y)) = |xy|; \qquad f^{-1}(\{0\}), \quad f^{-1}((-5, 2])$,
   $f((-2, 1) \times \{-1\}),\ f((-2, 1) \times [-1, 3])$;

   (g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f((x,y)) = \min\{2, |y|\}; \qquad f^{-1}(\{-2, 0, 1, 2\}), \quad f^{-1}((1, 3])$,
   $f((-2, 1) \times (-1, 3)), \quad f(f^{-1}(\{-1, 0, 1, 2, 3\})), \quad f(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + (y-1)^2 = 2\})$;

   (h) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = z^3; \qquad f^{-1}(\{j, -1\}), \quad f^{-1}(\mathbb{R}), \quad f(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \wedge \arg(z) \in [0, \frac{\pi}{4}]\})$.
   Czy $\{j, -j\} \subseteq f^{-1}(\{j, -j\})$?

   (i) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = j|z| + 1. \qquad f(\{z \in \mathbb{C} : \ |z - 2j| < 1\}), \quad f^{-1}(\{1 + 2j, 1 - 2j\})$,
   $f^{-1}(\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Im} z < 3\})$.