MATEMATYKA KONKRETNA 1 $\quad Z_2$

1. Różnicą symetryczną dwóch zbiorów A i B nazywamy zbiór $A \div B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą równości:

   $A \div B = \emptyset \Leftrightarrow A = B, \quad A \div \emptyset = A, \quad A \div B = (A \cup B) - (A \cap B),$

2. Wyznaczyć $B \setminus \mathbb{R}$, $(A \cup B) \setminus C$, $(A \div B) \cap \mathbb{R}$, 2^B, $A \times B$

   dla $A = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$, $B = \{0, \emptyset\}$, $C = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}^2\}$.

3. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| + |y| < 2\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \leqslant |x|\}$.
   Narysować zbiory: a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, c) $A \div B$,
   d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x,y) \in A \Rightarrow (x,y) \in B\}$, e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x,y) \in A \Leftrightarrow (x,y) \in B\}$.

4. W pewnej stuosobowej grupie język angielski znają 62 osoby, niemiecki – 41, a francuski – 27, przy czym 23 osoby znają angielski i niemiecki, 11 – angielski i francuski, a 8 – francuski i niemiecki. Dwie osoby znają wszystkie trzy języki. Ile osób nie zna żadnego z tych trzech języków? Ile zna tylko niemiecki? Ile osób skłamałoby mówiąc: "Jeżeli nie znam niemieckiego, to znam angielski"?

5. Wyznaczyć $\bigcup_{t \in T} A_t$, $\bigcap_{t \in T} A_t$, gdzie rodzina A_t określona jest następująco:

   (a) $A_t = \{x \in \mathbb{R} : 1 + \frac{1}{t} \leqslant x \leqslant 4 + \frac{1}{t^2}\}$, $T = \mathbb{N}$,
   (b) $A_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geqslant t^2\}$, gdzie $T = \mathbb{R}$,
   (c) $A_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 2 - \sin t\}$, gdzie $T = \mathbb{R}$,
   (d) $A_t = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + (2 - t^2)x - 2t^2 = 0\}$, gdzie $T = \mathbb{R}$,
   (e) $A_t = \{x \in \mathbb{R} : 3 + (-1)^t - \frac{(-1)^t}{t} < x < 7 + (-1)^t - \frac{(-1)^t}{t}\}$, gdzie $T = \mathbb{N}$,
   (f) $A_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant tx(x-4)\}$, gdzie $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

6. Dla rodziny $A_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant tx^2\}$, $(t \in \mathbb{R})$ wyznaczyć (narysować) zbiory:

$$\bigcup_{t \in \mathbb{N}} A_t, \quad \bigcup_{t \in \mathbb{R}} A_t, \quad \bigcup_{t \in [0;1)} A_t, \quad \bigcup_{t \in (0;1)} A_t \quad \bigcap_{t \in \mathbb{N}} A_t, \quad \bigcup_{t \in [0;1]} A'_t$$

7. Niech $A_n = \mathbb{R} \setminus (2n-1, 2n+1) = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2n| \geqslant 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć zbiory:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A'_n.$$

8. Niech $A_m = \{x \in \mathbb{R} : m - 1 - (-1)^m \leqslant x \leqslant m + 1 - (-1)^m\}$, $m \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć zbiory:

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m, \quad \bigcap_{m=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus A_m), \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus A_m), \quad \bigcup_{m \in 2\mathbb{N}} A_m.$$