MATEMATYKA KONKRETNA 1 Z_1

1. Zapisać symbolicznie następujące zdania i formy zdaniowe:

   (a) nie ma największej liczby rzeczywistej,

   (b) p jest liczbą pierwszą,

   (c) największy wspólny dzielnik liczb a i b wynosi 8,

   (d) nie każda liczba naturalna nieparzysta jest podzielna przez 3,

   (e) każda liczba naturalna jest kwadratem pewnej liczby rzeczywistej,

   (f) k jest liczbą naturalną niepodzielną przez siedem lub podzielną przez trzy,

   (g) istnieje największa ujemna liczba rzeczywista.

   W zapisie formuł nie używać symbolu dzielenia ani podzielności liczb.

2. Czy następujące zdania są prawdziwe?

   (a) $(\forall\, x \in \mathbb{N})(\exists\, y \in \mathbb{N})(x < y)$, (a') $(\exists\, y \in \mathbb{N})(\forall\, x \in \mathbb{N})(x < y)$,

   (b) $(\forall\, x \in \mathbb{N})(\exists\, y \in \mathbb{N})(y < x)$, (b') $(\exists\, y \in \mathbb{N})(\forall\, x \in \mathbb{N})(y \leqslant x)$,

   (c) $(\forall\, x \in \mathbb{N})(\forall\, y \in \mathbb{N})[x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{N})(x < z \wedge z < y)]$.

3. Wyznaczyć zbiór elementów $x \in \mathbb{R}$ spełniających formę zdaniową $\varphi(x)$.

   a) $\varphi(x):\ x < e \Rightarrow x > \pi$ b) $\varphi(x):\ x < e \Leftrightarrow x \leqslant \pi$

   c) $\varphi(x):\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ x < \sin y$ d) $\varphi(x):\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x < y^2 + \pi$

   e) $\varphi(x):\ x > e \Rightarrow\ (\forall y \in \mathbb{R}\ \ x < y^2 + \pi)$ f) $\varphi(x):\ (\exists y \in \mathbb{R}\ \ x < \sin y) \Leftrightarrow x > e$

4. Czy następujące zdania są prawami rachunku kwantyfikatorów? Jesli tak, to je udowodnić, jeśli nie, to znaleźć kontrprzykład.

   (a) $\forall x[\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\forall x\, \Phi(x) \Rightarrow \forall x \Psi(x)]$,

   (b) $\forall x[\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)] \Rightarrow [\exists x\, \Phi(x) \Rightarrow \exists x \Psi(x)]$,

   (c) $\forall x[\Phi(x) \vee \Psi(x)] \Rightarrow [\forall x\, \Phi(x) \Rightarrow \forall x \Psi(x)]$,

   Czy implikacje odwrotne są prawdziwe? Udowodnić lub podać kontrprzykład.

5. Określić wartość logiczną zdań i zapisać ich zaprzeczenia bez użycia symbolu negacji:

   (a) $\exists x \in \mathbb{R}\ [x < \pi \Rightarrow \sin x > \pi]$,

   (b) $(\exists x \in \mathbb{R}\ x < \pi) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}\ \ \sin x > \pi)$,

   (c) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}\, [x < y \Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Q}\, (x < q < y)]$.

6. Podać przykłady funkcji zdaniowych $Q(x, y)$ o zakresie zmienności $x, y \in \mathbb{R}$, pokazujące, że poniższe zdania nie są prawami rachunku kwantyfikatorów.

   (a) $\exists x\, \forall y\, Q(x, y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, Q(x, y)$,

   (b) $\forall y\, \exists x\, Q(x, y) \Rightarrow \exists y\, \forall x\, Q(x, y)$.

   Czy powyższe formuły są spełnialne? Jeśli tak, podać przykład.

   Formuła jest spełnialna, jeśli możliwe jest dobranie takiej funkcji zdaniowej, aby uzyskać zdanie prawdziwe.