MATEMATYKA KONKRETNA 1 $\quad Z_0$

W logice klasycznej **zdania** dzielimy na **prawdziwe** (o wartości logicznej 1) i **fałszywe** (o wartości logicznej 0).

Podstawowe spójniki — funktory zdaniotwórcze:

negacja	$\sim, \neg$	"nieprawda, że"			
koniunkcja	$\wedge$	"i"	**implikacja**	$\Rightarrow$	"jeśli...to..."
alternatywa	$\vee$	"lub"	**równoważność**	$\Leftrightarrow$	"wtedy i tylko wtedy, gdy"

Tabele wartościowań dla spójników logicznych

p	$\sim p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Tautologiami – prawami rachunku zdań nazywamy formuły, które są prawdziwe niezależnie od wartości logicznej zdań składowych, które w nich występują.
Formuła jest **spełnialna**, jeśli istnieją takie wartościowania zdań składowych, dla których otrzymamy zdanie prawdziwe.

---

1. Sprawdzić, czy następujące wyrażenia są tautologiami:
   (a) $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,
   (b) $p \vee [(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$,
   (c) $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$,
   (d) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$,
   (e) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r]$.
2. Sprawdzić, czy formuła $(q \Rightarrow (p \wedge r)) \wedge \neg((p \vee q) \Rightarrow (p \vee r))$ jest spełnialna.
3. W miejsce znaku $\diamond$ wstawić symbol spójnika logicznego, tak aby otrzymane zdanie złożone było tautologią
   (a) $[q \Rightarrow \neg(q \diamond p)] \Rightarrow p \vee \neg q$,
   (b) $[(p \Rightarrow q) \diamond \neg q] \Rightarrow \neg p$.
4. Spójnik $|$ zwany *kreską Sheffera* definiujemy następująco: $p \mid q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$. Sporządzić tabelkę dla tego spójnika. Uzasadnić, że spójniki logiczne: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ są definiowalne za pomocą tego spójnika.

5. Student ma rozwiązać test, odpowiadając na każde z pięciu pytań "tak" lub "nie". Wiadomo, że egzaminator zawsze daje więcej pytań z odpowiedziami "tak" niż "nie" oraz że trzy kolejne pytania nie mogą mieć tej samej odpowiedzi. Z treści pytań wynika ponadto, że odpowiedzi na pytania 1 i 5 są przeciwne. Student umie odpowiedzieć tylko na pytanie 4, ale dzięki temu jest w stanie znaleźć jedyne poprawne rozwiązanie testu. Jakie to rozwiązanie?

6. Oto fragment raportu policji sporządzony przez młodego aspiranta:

   Świadek był zastraszony lub też, jeśli Henry popełnił samobójstwo, to testament odnaleziono. Jeśli świadek był zastraszony, to Henry nie popełnił samobójstwa. Jeśli testament odnaleziono, to Henry popełnił samobójstwo. Jeśli Henry nie popełnił samobójstwa, to testament odnaleziono.

   Co komendant policji może wywnioskować z powyższego raportu (poza oczywistym faktem, że należy zwolnić aspiranta)?

Zasada Indukcji Matematycznej

Niech $\phi(n)$ oznacza pewną własność liczb naturalnych $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Jeżeli istnieje liczba $n_0 \in \mathbb{N}$ taka, że

Z1: $\phi(n_0)$ jest zdaniem prawdziwym,

Z2: dla każdego $k \geqslant n_0$ prawdziwa jest implikacja $\phi(k) \Rightarrow \phi(k+1)$,

to $\phi(n)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant n_0$.

---

7. Stosując zasadę indukcji matematycznej wykazać, że

   (a) $1^3 + 2^3 + \ldots + 2020^3 = (1 + 2 + \ldots + 2020)^2$

   (b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$

   (c) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

   (d) dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczby postaci $3^{4n+2} + 1$ są podzielne przez 10.