MATEMATYKA KONKRETNA 1

Zestaw domowy przed Z_3

1. Zaznacz na płaszczyźnie punkty o współrzędnych $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ odpowiadające kątom skierowanym α z poniższej tabeli.

α	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\sin\alpha$	$-\frac{\sqrt{4}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Dla każdego z tych punktów:

- zaznacz półprostą wychodzącą z punktu $(0,0)$ przechodzącą przez ten punkt;
- następnie zaznacz (i odczytaj współrzędne) punktu przecięcia zaznaczonej półprostej z okręgami o środku w $(0,0)$ i promieniach 2 oraz $\sqrt{2}$.

Analogiczne ćwiczenie powtórz dla kątów skierowanych z II i III ćwiartki układu współrzędnych.

2. Korzystając z wyników graficznych powyższego zadania rozwiąż (bez zbędnych czynności, jak na przykład korzystanie z tablic, czy rysowanie wykresów funkcji trygonometrycznych) następujace układy równań. Szukamy $\alpha \in (-\pi, \pi]$.

a) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}$ b) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $2\cos\alpha = 1, \quad 2\sin\alpha = -\sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}\cos\alpha = -1, \quad \sqrt{2}\sin\alpha = 1$

3. Dla $n \in \{3,4,6\}$ zaznacz na płaszczyźnie wierzchołki n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku w $(0,0)$ i odpowiednim promieniu, takim by jeden z wierzchołków tego n-kąta był punktem:

a) $(1,0)$, b) $(-1,0)$, c) $(0,-1)$, d) $(-1,1)$ e) $(1,-\sqrt{3})$.

Jakie kąty skierowane odpowiadają tym wierzchołkom?

Działaniem algebraicznym w zbiorze X nazywamy funkcję, która każdej uporządkowanej parze (a, b) elementów tego zbioru przyporządkowuje pewien element tego zbioru.
Przykłady działań w zbiorze $\mathbb{R}$ (liczb rzeczywistych): dodawanie, mnożenie, odejmowanie ....
Zazwyczaj piszemy np. $a + b = c$ zamiast $+(a, b) = c$.
Działanie może być dowolną funkcją.
Przykład: działanie $*$ w zbiorze $\mathbb{R}$ określone następująco: $a * b = a + b + \sqrt[3]{ab} - 7$.

Własności działań algebraicznych w danym zbiorze X:
Działanie $*$ jest **łączne**, jeśli $(a * b) * c = a * (b * c)$ dla dowolnych $a, b, c \in X$.
Działanie $*$ jest **przemienne**, jeśli $a * b = b * a$ dla dowolnych $a, b \in X$.
Element $e \in X$ jest **elementem neutralnym** działania $*$, jeśli $e*a = a*e = a$ dla dowolnego $a \in X$. Uwaga: Jeśli działanie posiada element neutralny, to istnieje taki tylko jeden.

Jakie własności mają działania dodawania i mnożenia w zbiorze liczb rzeczywistych?
Czy znane są jakieś inne własności tych działań oprócz wymienionych wyżej?

4. Sprawdzić, jakie własności ma podane działanie oraz wskazać jego element neutralny (o ile istnieje w danym zbiorze).

a) $x \circ y := x - y$ w zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$

b) $x * y := x + y + xy$ w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$

c) $x \sqcap y := \max\{x, y\}$ w zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

d) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ w zbiorze par liczb rzeczywistych $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

e) $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ w zbiorze par liczb rzeczywistych $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

5. Wykonać obliczenia:

$(c, 0) \oplus (x, 0)$, $\quad (c, 0) \odot (x, 0)$, $\quad (c, 0) \odot (x, y)$,

$(-1, 0) \odot (x, y)$, $\quad (0, 1) \odot (x, y)$, $\quad (0, 1) \odot (0, 1)$.