Przekształcenia liniowe

Def. Niech V i W będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$.
Funkcję $\varphi : V \to W$ nazywamy **przekształceniem liniowym** (przestrzeni V w przestrzeń W), jeśli dla dowolnych wektorów $u, v \in V$ i dowolnego $\alpha \in \mathbb{K}$ zachodzą równości

1) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ (przekształcenie jest addytywne),
2) $\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v)$ (przekształcenie jest jednorodne).

Przykłady: **przekształcenie zerowe**, **przekształcenie identycznościowe**.

Uwaga: Złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym.

Uwaga: Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.
Wówczas $\varphi(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ oraz dla każdego $v \in V$ zachodzi równość $\varphi(-v) = -\varphi(v)$.

Tw. Jeżeli $\dim V = n$ i układ $(v_1, ..., v_n)$ jest bazą przestrzeni V,
to dla dowolnej przestrzeni liniowej W i wektorów $w_1, ..., w_n \in W$
istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$,
takie że $\varphi(v_i) = w_i$ dla każdego $i = 1, ..., n$.

Macierz przekształcenia liniowego

Niech V, W będą skończeniewymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$.
$\mathcal{A} = (v_1, ..., v_n)$ - baza przestrzeni V, $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_m)$ - baza przestrzeni W.

Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.
Każdy wektor $\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n)$ można jednoznacznie zapisać w postaci kombinacji liniowej wektorów z bazy $\mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
&\varphi(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m \\
&\varphi(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m \\
&\vdots \\
&\varphi(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m
\end{aligned}$$

Macierz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ nazywamy macierzą przekształcenia φ w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ i oznaczamy symbolem $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$.

Kolumny macierzy $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ są utworzone ze współrzędnych wektorów $\varphi(v_j)$ w bazie $\mathcal{B}$ (dla kolejnych wektorów v_j bazy $\mathcal{A}$).

Uwaga: Macierze tego samego przekształcenia $\varphi : V \to W$ mogą być różne - zależą od wyboru bazy przestrzeni V i W, ale zawsze są tego samego wymiaru $m \times n$, gdzie $n = \dim V$, $m = \dim W$.

Tw. Niech $\varphi : V \to W$ i $\psi : W \to U$ - przekształcenia liniowe,
gdzie V, W, U - przestrzenie liniowe skończonego wymiaru nad ciałem $\mathbb{K}$.
Niech $\mathcal{A}$ - baza przestrzeni V, $\mathcal{B}$ - baza przestrzeni W, $\mathcal{C}$ - baza przestrzeni U.
Wówczas $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(\psi \circ \varphi) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\psi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$.

Stw. Jeżeli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są bazami przestrzeni V, to $M_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id)$.

Stw. Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym
(V, W - przestrzenie skończeniewymiarowe)
$\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ - bazy przestrzeni V, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ - bazy przestrzeni W.
Wówczas zachodzi równość: $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(\varphi) = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(id) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}(id)$.

Tw. Niech V, W - skończeniewymiarowe przestrzenie liniowe,
$\mathcal{A}$ - baza przestrzeni V, $\mathcal{B}$ - baza przestrzeni W.
Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, $v \in V$, $w \in W$.
Wówczas $\varphi(v) = w \Leftrightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) \cdot M_{\mathcal{A}}(v) = M_{\mathcal{B}}(w)$

Wniosek. Jeżeli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są bazami przestrzeni V, to dla dowolnego wektora $v \in V$ zachodzi równość $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \cdot M_{\mathcal{A}}(v) = M_{\mathcal{B}}(v)$.

Def. **Jądrem przekształcenia liniowego** $\varphi : V \to W$ nazywamy zbiór

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{v \in V : \varphi(v) = \mathbf{0}_W\}.$$

Def. **Obrazem przekształcenia liniowego** $\varphi : V \to W$ nazywamy zbiór

$$\operatorname{Im} \varphi = \{\varphi(v) : v \in V\}.$$

Tw. Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wtedy:
$\operatorname{Ker} \varphi$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V,
$\operatorname{Im} \varphi$ jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej W.

Tw. Jeśli V jest przestrzenią liniową skończeniewymiarową, to dla dowolnego przekształcenia liniowego $\varphi : V \to W$ zachodzi równość $\dim V = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$.

Def. Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.
Jeśli $\operatorname{Im} \varphi$ jest przestrzenią skończeniewymiarową to liczbę $\dim \operatorname{Im} \varphi$ nazywamy **rzędem** przekształcenia liniowego φ i oznaczamy $r(\varphi)$.

Tw. Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym,
$\mathcal{A}$ - baza przestrzeni V, $\mathcal{B}$ - baza przestrzeni W.
Wówczas $r(\varphi) = r\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)\right)$.

Uwaga: Rząd macierzy przekształcenia nie zależy od wyboru bazy (wszystkie macierze tego samego przekształcenia maja jednakowy rząd).

Def. Przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ nazywamy **nieosobliwym** jeśli jest różnowartościowe.

Tw. Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym (V - skończeniewymiarowa).
Następujące warunki są równoważne:
(1) φ jest przekształceniem nieosobliwym,
(2) $\operatorname{Ker} \varphi = \{\mathbf{0}_V\}$
(3) $r(\varphi) = \dim V$.

Def. Przekształcenie liniowe $\varphi : V \to W$ nazywamy **izomorfizmem** jeśli jest różnowartościowe i "na". Przestrzenie V i W nazywamy wtedy **izomorficznymi**.

Stw. Przekształcenie $\varphi : V \to W$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy
$\operatorname{Ker} \varphi = \{\mathbf{0}_V\}$ i $\operatorname{Im} \varphi = W$.

Uwaga: Wymiary izomorficznych przestrzeni skończenie wymiarowych są równe.

Uwaga: Macierz izomorfizmu jest macierzą kwadratową nieosobliwą.

Jeśli V i W są przestrzeniami liniowymi skończeniewymiarowymi i $\dim V = \dim W$
to każde przekształcenie nieosobliwe $\varphi : V \to W$ jest izomorfizmem.

Tw. Każda przestrzeń liniowa wymiaru n nad ciałem $\mathbb{K}$ jest izomorficzna z $\mathbb{K}^n$.