Układy równań liniowych

Równanie liniowe z niewiadomymi $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}$ to równanie postaci

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \beta,$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n, \beta$ są danymi elementami ciała $\mathbb{K}$.

Będziemy rozważać układy m równań liniowych z n niewiadomymi:

$$(\star) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Macierz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ nazywamy macierzą współczynników układu równań,
macierz $B = [b_i]_{m \times 1}$ nazywamy kolumną (wektorem) wyrazów wolnych.

Rozwiązaniem układu (*) nazywamy każdy ciąg elementów $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}$ spełniający ten układ.

Układ równań liniowych nazywamy **jednorodnym**, jeśli wszystkie wyrazy wolne są równe 0.
W przeciwnym wypadku układ nazywamy **niejednorodnym**.

Uwaga Każdy układ jednorodny ma co najmniej jedno rozwiązanie.
Jest nim rozwiązanie zerowe $x_1 = ... = x_n = 0$.

Uwaga Wprowadźmy oznaczenie $X = [x_j]_{n \times 1}$. (X – wektor niewiadomych)
Układ $(\star)$ jest wtedy równoważny równaniu macierzowemu $A \cdot X = B$,
gdzie X jest niewiadomą macierzą, A, B - danymi macierzami.

Def. Układ $(\star)$ nazywamy **układem Cramera**, jeśli liczba równań jest równa liczbie niewiadomych oraz macierz współczynników układu ma wyznacznik różny od zera.

Metoda Cramera

Tw. Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie.
Jeżeli układ $(\star)$ jest układem Cramera z n niewiadomymi, to rozwiązanie dane jest wzorami

$$x_1 = \frac{\det A_{(x_1)}}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_{(x_2)}}{\det A}, \quad ..., \quad x_n = \frac{\det A_{(x_n)}}{\det A} \qquad (\textbf{wzory Cramera})$$

gdzie $A = [a_{ij}]$ oraz $A_{(x_j)}$ oznacza macierz otrzymaną z macierzy A poprzez zastąpienie kolumny współczynników przy niewiadomej x_j kolumną wyrazów wolnych.

Uwaga. Jedynym rozwiązaniem jednorodnego układu Cramera jest rozwiązanie zerowe.

Metoda macierzowa

Tw. Jeżeli układ $(\star)$ jest układem Cramera z n niewiadomymi,
to równanie macierzowe $A \cdot X = B$, gdzie $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $B = [b_i]_{n\times 1}$, $X = [x_j]_{n\times 1}$
ma dokładnie jedno rozwiązanie $X = A^{-1} \cdot B$.

Def. Macierzą rozszerzoną układu $(\star)$ nazywamy macierz $A|B = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$.

Tw. Kroneckera-Capellego
Układ równań liniowych $(\star)$ o macierzy rozszerzonej $A|B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r(A|B)$.

Ponadto

1° jeśli $r(A) = r(A|B) = n$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie,

2° jeśli $r(A) = r(A|B) = k < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - k$ zmiennych.

Def. Jądrem macierzy $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ nazywamy zbiór wszystkich macierzy $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$, takich że $AX = \mathbf{0}$. Jądro macierzy A oznaczamy symbolem $\operatorname{Ker} A$ i traktujemy jako podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{K}^n$.

Wyznaczenie jądra macierzy odpowiada rozwiązaniu jednorodnego układu równań o macierzy rozszerzonej $A|\mathbf{0}$. Pojęcie jądra macierzy A odpowiada pojęciu jądra przekształcenia liniowego, którego macierz w ustalonych bazach jest równa macierzy A.

Def. Układem fundamentalnym rozwiązań równania $AX = \mathbf{0}$ nazywamy dowolną bazę przestrzeni rozwiązań tego układu, czyli bazę przestrzeni $\operatorname{Ker} A$.

Rozważmy układ $(\star)$ o macierzy rozszerzonej $A|B$.
Niech X_0 będzie rozwiązaniem szczególnym równania $AX = B$.

Każde rozwiązanie układu o macierzy rozszerzonej $A|B$ jest sumą pewnego rozwiązania szczególnego X_0 oraz kombinacji liniowej wektorów z układu fundamentalnego rozwiązań.

Rozwiązywanie układów równań liniowych

Metoda wyznacznikowa

Jeżeli $r(A) = r(A|B) = k < n$, to usuwamy z układu (*) te równania, w których współczynniki przy niewiadomych nie wchodzą do niezerowego minora stopnia k (wcześniej wskazujemy taki minor). Nastepnie po lewej stronie pozostawiamy te zmienne, których współczynniki weszły do wskazanego niezerowego minora. Pozostałe składniki przenosimy na prawą stronę równań. Ze względu na zmienne po lewej stronie układ jest układem Cramera. Rozwiązujemy ten układ traktując pozostałe zmienne (jest ich $n - k$) jako parametry.

Metoda eliminacji

Następujące operacje wierszowe nie zmieniają rozwiązania:
- pomnożenie wiersza przez stałą różną od zera
- zamiana wierszy miejscami
- dodanie do wiersza kombinacji liniowej innych wierszy
- skreślenie zerowego wiersza
- skreślenie wiersza liniowo zależnego od innych wierszy.

Przy pomocy operacji wierszowych sprowadzamy macierz rozszerzoną układu równań do postaci trapezowej (schodkowej) (eliminacja Gaussa). Inną modyfikacją metody eliminacji jest metoda kolumn jednostkowych.

Metoda eliminacji Gaussa

Jeżeli istnieje wiersz, w którym są same zera oprócz ostatniej kolumny, to układ jest sprzeczny. W przeciwnym przypadku można niewiadome odpowiadające kolumnom wiodącym (tym, w których są schodki) wyrazić za pomocą pozostałych, które traktujemy jako parametry. Wyznaczamy niewiadome zaczynając od ostaniego równania, wstawiając później wyznaczone zmienne do kolejnych wyższych równań.

Metoda kolumn jednostkowych

Jeżeli $r(A) = r(A|B) = k < n$, to wykonując operacje wierszowe na macierzy $(A|B)$ możemy uzyskać taką postać macierzy A, w której będzie k liniowo niezależnych kolumn macierzy jednostkowej I_k. Gdy taką postać uzyskamy, pozostawiamy po lewej stronie układu zmienne odpowiadające kolumnom jednostkowym, a pozostałe przenosimy na prawą stronę równań. Odczytujemy rozwiązanie, traktując zmienne, które pojawiły się po prawej stronie jako parametry.

Wykorzystanie rozwiązania szczególnego i ukladu fundamentalnego rozwiązań

Układ (*) można rozwiązać znajdując jego jedno rozwiązanie szczególne X_0 oraz wyzanczając układ fundamentalny rozwiązań odpowiadającego mu układu jednorodnego. Wtedy rozwiązaniem układu (*) będzie suma $X_0 + X_B$, gdzie X_B jest kombinacją liniową wektorów z układu fundamentalnego rozwiązań.