Wyznacznik

Def. **Permutacją** zbioru $\{1, ..., n\}$ nazywamy bijekcję $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$.

Zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, ..., n\}$ oznaczamy symbolem S_n.

Permutację zapisujemy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Uwaga. Dla zbioru n-elementowego istnieje dokładnie $n!$ permutacji.

Niech σ będzie permutacją zbioru $\{1, ..., n\}$, $k, m \in \{1, ..., n\}$.

Def. Parę $(\sigma(k), \sigma(m))$ nazywamy **inwersją** permutacji σ, jeśli $k < m$ i $\sigma(k) > \sigma(m)$.

Przykład. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$

inwersje: $(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4), (6, 2), (6, 4)$.

Def. **Znakiem permutacji** σ nazywamy liczbę $(-1)^r$, gdzie r jest liczbą inwersji permutacji σ. Znak permutacji σ oznaczamy symbolem $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

Permutację σ nazywamy **parzystą**, jeśli $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.
Permutację nazywamy **nieparzystą**, jeśli $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

Def. **Wyznacznikiem macierzy** $[a_{ij}]_{n\times n}$ nad $\mathbb{K}$ nazywamy element ciała $\mathbb{K}$ zdefiniowany wzorem

$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot ... \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

Wyznacznik macierzy $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ oznaczamy symbolem $\det A$, $\det[a_{ij}]$ lub $\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Uwaga. Suma w wyznaczniku składa się z $n!$ składników, połowa jest ze znakiem $+$, a połowa ze znakiem $-$. Każdy składnik jest iloczynem n czynników, po jednym z każdego wiersza i z każdej kolumny.

Przykłady 1. $\det[a] = a$ 2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}+ \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{array}$

Tw. Dla dowolnej macierzy kwadratowej A zachodzi równość $\det A = \det A^T$.

Tw. Cauchy'ego. Dla $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zachodzi równość

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Wniosek. Dla dowolnej macierzy kwadratowej A zachodzi równość $\det(A^m) = (\det A)^m$.

Własności wyznaczników

1. Wyznacznik macierzy, w której wiersze (kolumny) są liniowo zależne jest równy 0.
Z tego wynika, że równy 0 będzie wyznacznik macierzy

- która ma wiersz lub kolumnę składającą się z samych zer;

- w której występują dwa jednakowe wiersze lub kolumny;

- w której jeden wiersz (kolumna) jest kombinacją liniową innych wierszy (kolumn).

2. Wyznacznik macierzy jest jednorodną i addytywną funkcją wierszy i kolumn macierzy.
W szczególności z dowolnego wiersza (kolumny) można wyłączyć różną od zera stałą przed wyznacznik.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \dots & \alpha a_{ij} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \alpha a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & \alpha a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \alpha a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wniosek. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Wtedy $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

3. Wartość wyznacznika nie zmienia się, jeśli do wiersza (kolumny) dodamy wielokrotność innego wiersza (kolumny).

4. Przestawienie dwóch wierszy (kolumn) powoduje, że wyznacznik zmienia znak na przeciwny.

Def. Macierz kwadratową A nazywamy **nieosobliwą**, jeśli $\det A \neq 0$.
W przeciwnym wypadku macierz kwadratową A nazywamy **osobliwą**.

Def. **Dopełnieniem algebraicznym wyrazu** a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ nazywamy skalar

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det B_{ij},$$

gdzie B_{ij} jest macierzą otrzymaną z macierzy A poprzez usunięcie jej i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Tw. Laplace'a. Dla dowolnej macierzy $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ oraz $i, j \in \{1, ..., n\}$ zachodzą równości

$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in}$ (rozwinięcie Laplace'a względem i-tego wiersza)
$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj} \cdot A_{nj}$ (rozwinięcie Laplace'a względem j-tej kolumny)

Def. Niech $[A_{ij}]$ będzie macierzą, której wyrazami są dopełnienia algebraiczne wyrazów a_{ij} macierzy A. Macierz $[A_{ij}]^T$ nazywamy **macierzą dołączoną** macierzy A i oznaczamy A^D.

Tw. Dla dowolnej macierzy kwadratowej A zachodzi równość $A \cdot A^D = A^D \cdot A = (\det A) \cdot I$.

Wniosek. Jeśli A jest macierzą kwadratową nieosobliwą, to $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^D$.

Wniosek. Macierz kwadratowa jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa.

Wniosek. Jeśli macierz A jest odwracalna, to $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Rząd macierzy

Def. **Minorem stopnia** k macierzy $A_{m\times n}$ nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej otrzymanej z A poprzez wykreślenie $m - k$ wierszy i $n - k$ kolumn.

Def. **Rzędem** macierzy nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.
Rząd macierzy A oznaczamy symbolem $r(A)$ lub $\operatorname{rank}(A)$.

Tw. Liczba $k \in \mathbb{N}$ jest **rzędem** niezerowej macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy

1° istnieje różny od zera minor stopnia k macierzy A,

2° nie istnieje różny od zera minor macierzy A stopnia większego niż k.

Uwaga. Znalezienie zerowego minora stopnia k nie oznacza, że $r(A) < k$.

Stw. Dla dowolnej macierzy A zachodzi równość $r(A) = r(A^T)$.

Wniosek. Rząd macierzy nie może przekraczać ani liczby jej wierszy, ani liczby jej kolumn.

Rząd macierzy nie zmienia się w wyniku wykonania następujących operacji:
- dodania do wiersza (lub kolumny) wielokrotności innego wiersza (odpowiednio kolumny),
- pomnożenia wiersza (lub kolumny) przez stałą różną od zera,
- zamiany wierszy (lub kolumn) miejscami,
- skreślenia zerowego wiersza (lub zerowej kolumny),
- skreślenia wiersza będącego kombinacja liniową innych wierszy

  (lub kolumny będącej kombinacją liniową innych kolumn).

Kolumny i wiersze macierzy jako wektory

Uwaga. Kolumny macierzy $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ możemy interpretować jako wektory z przestrzeni $\mathbb{K}^m$, a wiersze jako wektory z przestrzeni $\mathbb{K}^n$.
Niech A_j oznacza j-tą kolumnę, zaś A^i oznacza i-ty wiersz macierzy A.
Wtedy macierz A możemy zapisać w postaci $A = [A_1, A_2, ..., A_n]$.

Wtedy **rząd macierzy** A, $r(A) = \dim Lin\{A_1, ..., A_n\} = \dim Lin\{A^1, ..., A^m\}$.

Rząd macierzy jest równy maksymalnej liczbie liniowo niezależnych kolumn (wierszy) macierzy.

Macierz układu wektorów, macierz zmiany bazy

Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową o bazie $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$.
Dowolny wektor $w \in V$ możemy jednoznacznie przedstawić w postaci:
$w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$.

Ozn. $M_{\mathcal{B}}(w) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ - macierz współrzędnych wektora w w bazie $\mathcal{B}$.

Symbolem $M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$ będziemy oznaczać macierz współrzędnych wektorów układu $\mathcal{A}$ w bazie $\mathcal{B}$.
(W <u>kolumnach</u> macierzy zapisujemy współrzędne kolejnych wektorów układu $\mathcal{A}$.)

Tw. Niech $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ będzie bazą przestrzeni V.
Dla dowolnego układu $\mathcal{A} = (u_1, ..., u_m)$ wektorów z przestrzeni V zachodzi równość

$$\dim Lin\{u_1, ..., u_m\} = r(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})).$$

Tw. Niech $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ będzie bazą przestrzeni V.
Następujące warunki są równoważne:

(1) Układ $\mathcal{A} = (u_1, ..., u_n)$ wektorów z V jest bazą przestrzeni V,
(2) $r(M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A})) = n$,
(3) $\det M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \neq 0$.

Def. Jeżeli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są bazami przestrzeni V, to macierz $M_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ nazywamy **macierzą zmiany bazy** (lub **macierzą przejścia od bazy $\mathcal{A}$ do bazy $\mathcal{B}$**).

Stw. Jeżeli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są bazami przestrzeni V, to $M_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = (M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}))^{-1}$.

Stw. Jeżeli $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są bazami przestrzeni V, $w \in V$, to $M_{\mathcal{B}}(w) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \cdot M_{\mathcal{A}}(w)$.