Przestrzenie liniowe

Def. 1. ***Przestrzenią liniową (wektorową) nad*** $\mathbb{K}$ *nazywamy trójkę* $((V,+),(\mathbb{K},\oplus,\odot),\cdot)$ *o następujących własnościach:*

1) $(V,+)$ *jest grupą przemienną,*

2) $(\mathbb{K},\oplus,\odot)$ *jest ciałem,*

3) $\cdot:\mathbb{K}\times V\to V$ *jest działaniem zewnętrznym ciała* $\mathbb{K}$ *na zbiór* V

spełniającym dla dowolnych $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ *i dowolnych* $u,v\in V$ *następujące warunki:*

1° $(\alpha\oplus\beta)\cdot v=\alpha\cdot v+\beta\cdot v$

2° $\alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v$

3° $\alpha\cdot(\beta\cdot v)=(\alpha\odot\beta)\cdot v$

4° $1\cdot v=v$ *(gdzie 1 oznacza jedynkę ciała* $\mathbb{K}$*).*

Elementy zbioru V nazywamy **wektorami**, elementy zbioru $\mathbb{K}$ nazywamy **skalarami**.
Działanie $\cdot$ nazywa się **mnożeniem wektorów przez skalary.**

Przykłady

1. $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}^n$ nad $\mathbb{C}$

2. $\mathbb{R}[x]$ nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_n[x]$ nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}[x]$ nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}_n[x]$ nad $\mathbb{C}$

3. $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$

Element neutralny grupy $(V,+)$ nazywamy **wektorem zerowym** i oznaczamy $\mathbf{0}$.
Wektor przeciwny do $v\in V$ w grupie $(V,+)$ oznaczamy symbolem $-v$.
Różnica wektorów $v-u=v+(-u)$ dla $v,u\in V$.

Tw. 1. *Niech* V *będzie przestrzenią liniową nad* $\mathbb{K}$*,* $v\in V$*,* $\alpha\in\mathbb{K}$*. Wówczas*

1. $\alpha v=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\alpha=0\vee v=\boldsymbol{0}$

2. $(-\alpha)\cdot v=\alpha\cdot(-v)=-(\alpha v)$

Jeśli $f:X\to Y$ i $A\subseteq X$ to funkcję $\varphi:A\to Y$, taką że dla każdego $x\in A$ zachodzi $\varphi(x)=f(x)$ nazywamy obcięciem funkcji f do zbioru A i oznaczamy $f|_A$.

Def. 2. *Podzbiór* $W\subseteq V$*, gdzie* $((V,+),\mathbb{K},\cdot)$ *jest przestrzenią liniową nad* $\mathbb{K}$*, nazywamy* ***podprzestrzenią liniową*** *przestrzeni* V*, jeśli trójka* $((W,+|_W),\mathbb{K},\cdot|_W)$ *jest przestrzenią liniową.*

Tw. 2. *Niech* $((V,+),\mathbb{K},\cdot)$ *będzie przestrzenią liniową.*

Trójka $((W,+),\mathbb{K},\cdot)$, *gdzie* $W \subseteq V$ *jest podprzestrzenią przestrzeni* V *wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. $\forall v,w \in W \ v+w \in W$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \ \forall v \in W \ \alpha v \in W$

(lub równoważnie $\forall \alpha \in \mathbb{K} \ \forall v,w \in W \ \alpha v + w \in W$*).*

Własności

Jeśli $\mathbf{0}$ – wektor zerowy przestrzeni liniowej V, to $\{\mathbf{0}\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Jeśli U i W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V, to $U \cap W$ jest podprzestrzenią V.

Jeśli U i W są podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V, to $U + W = \{u + w : u \in U \wedge w \in W\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.

Def. 3. *Niech* V *- przestrzeń liniowa nad* $\mathbb{K}$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$, $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, $n \in \mathbb{N}$.
Wektor $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ *nazywamy* ***kombinacją liniową*** *wektorów* $v_1, v_2, ..., v_n$ *o współczynnikach* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $v_1, v_2, ..., v_n$ z przestrzeni V nad ciałem $\mathbb{K}$ oznaczamy $Lin\{v_1, v_2, ..., v_n\}$,
tzn. $Lin\{v_1, v_2, ..., v_n\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n : \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}\}$.

Przyjmujemy dodatkowo, że $Lin\{\emptyset\} = \{\mathbf{0}\}$.

Uwaga. Dla dowolnych wektorów $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ $Lin\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni V. $Lin\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ nazywamy **przestrzenią rozpiętą przez wektory** $v_1, v_2, ..., v_n$ lub przestrzenią generowaną przez ten zbiór wektorów.

Def. 4. *Niech* $v_1, v_2, ..., v_n$ *- wektory z przestrzeni* V *nad ciałem* $\mathbb{K}$.
Ciąg $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *nazywamy* ***układem wektorów*** *w przestrzeni* V *nad ciałem* $\mathbb{K}$.
Podukładem *układu* $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *nazywamy układ* $(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_k})$,
gdzie $1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n$.

Dodatkowo wprowadza się pojęcie układu pustego, ozn. $\emptyset$.

Def. 5. *Niech* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$.
Układ wektorów $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *w przestrzeni liniowej* V *nad* $\mathbb{K}$ *nazywamy* ***liniowo niezależnym***, *jeśli zachodzi implikacja:* $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

W przeciwnym wypadku układ $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *nazywamy* ***liniowo zależnym***.

Przyjmujemy, że układ pusty jest liniowo niezależny.

Stw. Układ wektorów jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z wektorów układu można wyrazić w postaci kombinacji liniowej pozostałych.

Def. 6. *Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$.*
Układ $(v_1, ..., v_n)$ wektorów z przestrzeni V nazywamy ***bazą*** *przestrzeni V, jeśli*

1° *układ $(v_1, ..., v_n)$ jest liniowo niezależny,*

2° *$Lin\{v_1, ..., v_n\} = V$ (układ $(v_1, ..., v_n)$ rozpina przestrzeń V).*

Warunek 2° jest równoważny warunkowi: $\forall w \in V \ \ \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K} \ \ w = \alpha_1 v_1 + ... \alpha_n v_n$, tzn. każdy wektor z przestrzeni V można wyrazić w postaci kombinacji liniowej wektorów $v_1, ..., v_n$. Z warunku 1° wynika, że przedstawienie to jest jednoznaczne.
Układ skalarów $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ nazywamy **współrzędnymi wektora** w w bazie $(v_1, ..., v_n)$.
Przyjmujemy, że bazą przestrzeni zerowej jest układ pusty.

Tw. 3. *Każda przestrzeń liniowa posiada bazę.*

Tw. 4. *Jeżeli układy $(v_1, ..., v_n)$ oraz $(w_1, ..., w_m)$ są bazami przestrzeni V, to $n = m$.*

Def. 7. *Przestrzeń wektorową mającą (skończoną) bazę nazywamy* ***skończenie wymiarową****.*
Jeżeli V jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową, to liczbę elementów bazy przestrzeni V nazywamy ***wymiarem przestrzeni*** *V i oznaczamy symbolem $\dim V$.*

Jeżeli żaden skończony układ niezerowej przestrzeni V nie rozpina całej przestrzeni V, to mówimy, że V jest przestrzenią ***nieskończenie wymiarową****.*

Tw. 5. *Niech V będzie niezerową przestrzenią liniową.*
Następujące warunki są równoważne

(1) Układ $(v_1, ..., v_n)$ jest bazą przestrzeni V.

(2) Układ $(v_1, ..., v_n)$ jest liniowo niezależny i $\dim V = n$.

(3) $Lin\{v_1, ..., v_n\} = V$ i $\dim V = n$.

(4) Układ $(v_1, ..., v_n)$ jest maksymalnym liniowo niezależnym układem w przestrzeni V.

Niech 1 oznacza jedynkę ciała $\mathbb{K}$, 0 - zero ciała $\mathbb{K}$.
Układ $((1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1))$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{K}^n$ nad $\mathbb{K}$.
Bazę tę oznaczamy $\mathcal{E}_n$ i nazywamy **bazą kanoniczną** (**standardową**) przestrzeni $\mathbb{K}^n$ nad $\mathbb{K}$.
Wektory z tej bazy nazywamy wektorami **jednostkowymi** i oznaczamy $e_1, e_2, \ldots, e_n$.
W przestrzeni $\mathbb{K}_n[t]$ nad $\mathbb{K}$ bazą kanoniczną (standardową) jest układ $(t^n, t^{n-1}, ..., t, 1)$.