Funkcje

Funkcje będą traktowane jako relacje specjalnego typu.

Def. 1. *Relację binarną $R \subseteq X \times Y$ nazywamy* ***jednoznaczną*** *gdy,*

$$\forall x \in X \; \forall y_1, y_2 \in Y (x\, R\, y_1 \wedge x\, R\, y_2 \Rightarrow y_1 = y_2).$$

Relację jednoznaczną nazywamy ***funkcją*** *o argumentach w X i wartościach w Y, jeśli $d_R = X$, czyli $\forall x \in X \;\; \exists y \in Y \;\; x\, R\, y$.*

Dla funkcji f stosujemy oznaczenie $f : X \to Y$.
Zbiór X nazywamy **dziedziną** funkcji f i oznaczamy D_f.
Przeciwdziedzinę relacji f, czyli zbiór $f(X) = \{y \in Y : \;\; \exists x \in X \;\; y = f(x)\} \subseteq Y$ nazywamy **zbiorem wartości** funkcji f i oznaczamy D_f^{-1}.
Zbiór wszystkich funkcji $f : X \to Y$ oznaczamy Y^X.

Złożenie (superpozycja) funkcji

Złożenie funkcji definiujemy tak, jak złożenie relacji.
Niech $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$, wtedy określamy złożenie tych funkcji następująco:

$$g \circ f : X \to Z, \;\; (g \circ f)(x) = z \Leftrightarrow \exists y \in Y \;\; y = f(x) \wedge z = g(y),$$

czyli dla każdego x ze zbioru X istnieje dokładnie jeden element z w zbiorze Z taki, że $z = g(f(x))$.
Uwaga 1: Nie dla wszystkich funkcji $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$, dla których istnieje $g \circ f$ musi istnieć złożenie $f \circ g$. Nawet jeśli istnieją oba złożenia, to na ogół nie są sobie równe. Oznacza to, że superpozycja funkcji nie jest operacją przemienną.
Uwaga 2: Zachodzi łączność złożenia, czyli dla dowolnych funkcji $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ i $h : Z \to W$ mamy $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
Uwaga 3: Relacja odwrotna do funkcji nie musi być funkcją.

Podstawowe własności funkcji

Def. 2. *Do funkcji $f : X \to Y$ stosujemy następujące określenia:*

- *różnowartościowa –* ***injekcja****, jeśli $\forall x_1, x_2 \in X \;\; [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$ lub równoważnie $\forall x_1, x_2 \in X \;\; [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$,*
- *”na” –* ***surjekcja****, jeśli $D_f^{-1} = Y$, czyli $\forall y \in Y \; \exists x \in X \;\; y = f(x)$,*
- *wzajemnie jednoznaczna –* ***bijekcja****, jeśli jest różnowartościowa i ”na”.*

Szczególne rodzaje funkcji

- **Funkcja identyczności**: $I_X : X \to X; \;\; I_X(x) = x \; \forall x \in X$.
- **Funkcja odwrotna**: Jeśli $f : X \to Y$ jest bijekcją, to istnieje funkcja $g : Y \to X$, taka, że $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y)$, oznaczenie: $g = f^{-1}$.

- **Funkcja charakterystyczna zbioru**: Niech $A \subseteq X$, definiujemy funkcję charakterystyczną zbioru A:

$$\chi_A : X \to \{0,1\}, \qquad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in A \\ 0, & \text{gdy } x \notin A \end{cases}$$

- **Permutacje**: Jeśli X jest zbiorem skończonym, to bijekcje zbioru X nazywamy permutacjami. Niech $X = \{1,2,\ldots,n\}$, permutację $f : X \to X$ zapisujemy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

  Składanie permutacji wykonujemy w następujący sposób:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ g(1) & g(2) & \cdots & g(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ g(f(1)) & g(f(2)) & \cdots & g(f(n)) \end{pmatrix}$$

Fakt: Jeżeli funkcje $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ są bijekcjami, to istnieje funkcja odwrotna do $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Operacje na funkcjach

- **Obcięcie funkcji**: Niech $f : X \to Y$, $(f \subseteq X \times Y)$, $Z \subseteq X$, wtedy $Z \times Y \subseteq X \times Y$. Funkcja g jest obcięciem funkcji f do zbioru Z, jeśli $g \subseteq Z \times Y$ oraz $g(z) = f(z)$ dla $z \in Z$.

- **Definiowanie warunkowe funkcji**: Niech $f_1 : X_1 \to Y_1$, $f_2 : X_2 \to Y_2, \ldots,$ $f_n : X_n \to Y_n$ oraz $X_i \cap X_j = \emptyset$, gdy $i \neq j$. Wtedy funkcję $f = f_1 \cup f_2 \cup \ldots \cup f_n$ definiujemy następująco: $f(x) = f_i(x)$ dla $x \in X_i$.

Obrazy i przeciwobrazy zbiorów

Niech $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

Def. 3. *Obrazem zbioru A wyznaczonym przez funkcję f nazywamy zbiór*

$$f(A) = \{y \in Y : \ \exists x \in A \ \ y = f(x)\} = \{f(x) : \ x \in A\} = \bigcup_{x \in A} \{f(x)\} \subseteq Y.$$

Uwaga: $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A \ \ y = f(x)$.

Def. 4. *Przeciwobrazem zbioru B wyznaczonym przez funkcję f nazywamy zbiór*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \ \ f(x) \in B\} \subseteq X.$$

Uwaga: $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Własności obrazów i przeciwobrazów zbiorów

Tw. 1. *Niech dana będzie funkcja* $f : X \to Y$*, zbiory* $A, B \subseteq X$*,* $C, D \subseteq Y$ *i rodziny zbiorów* $\{A_i,\ i \in I\} \subseteq 2^X$ *oraz* $\{B_j,\ j \in J\} \subseteq 2^Y$*, wtedy:*

1. $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ *również* $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;
2. $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ *także* $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;
3. $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ *również* $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;
4. $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ *oraz* $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;
5. $A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$;
6. $C \subseteq D \Rightarrow f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$;
7. $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$;
8. $f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D) = f^{-1}(C \setminus D)$;
9. $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$;
10. $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(X)$;
11. $f(\emptyset) = \emptyset$;
12. $C \cap D \neq \emptyset \Rightarrow f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \neq \emptyset$.

Tw. 2. *Jeżeli funkcja* $f : X \to Y$ *jest różnowartościowa, to zachodzą równości:*

1. $f(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ *również* $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;
2. $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$;
3. $f^{-1}(f(A)) = A$.