Relacje

Tematem są relacje, czyli pewne związki pomiędzy obiektami. Zazwyczaj mówimy, że elementy są w relacji, jeśli jest między nimi pewna zależność. Formalnie relacje definiujemy jako podzbiory iloczynu kartezjańskiego zbiorów.

Określenie relacji

Def. ***Relacją n-argumentową*** *nazywamy zbiór* $R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Zbiór $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ *nazywamy* ***polem relacji****.*

Jeśli $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$*, to mówimy o relacji w zbiorze* X*.*

Przypadki szczególne:

- $n = 1$, wtedy $R \subseteq X$, relacja 1-członowa jest podzbiorem zbioru X,
- $n = 2$, to $R \subseteq X \times Y$ nazywamy relacją binarną.

Relacje binarne

Niech $R \subseteq X \times Y$. Stosujemy równoważne zapisy $(x, y) \in R$ oraz $x\, R\, y$ które czytamy: x jest w relacji R z elementem y.

Wykresem relacji $R \subseteq X \times Y$ nazywamy zbiór wszystkich par (x, y) będących w relacji R.

Definiujemy ponadto:

- **zaprzeczenie relacji** $\boldsymbol{R}$: $x \not R\, y \Leftrightarrow \neg\, x\, R\, y$;
- **dziedzina relacji** $\boldsymbol{R}$ to zbiór: $domR = d_R := \{x \in X : \exists\, y \in Y \;\; x\, R\, y\}$;
- **przeciwdziedzina relacji** $\boldsymbol{R}$ to zbiór: $d_R^{-1} := \{y \in Y : \exists\, x \in X \;\; x\, R\, y\}$;
- **relacja odwrotna do** $\boldsymbol{R}$ to relacja: $R^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : \;\; (x, y) \in R\}$, $y\, R^{-1}\, x \Leftrightarrow x\, R\, y$, $\quad d_{R^{-1}} = d_R^{-1}$, $\quad d_{R^{-1}}^{-1} = d_R$;
- **złożenie relacji** $\boldsymbol{R}$ **i** $\boldsymbol{S}$: jeśli $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, to $S \circ R = U \subseteq X \times Z$

  $x\, U\, z \Leftrightarrow \exists\, y \in Y \; (x\, R\, y \;\wedge\; y\, S\, z)$.
  Składanie relacji nie jest przemienne, ale jest łączne, to znaczy: $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$.

Relacje szczególne

1. **Relacja pełna** (każdy x jest w relacji z każdym y) – $R = X \times Y$;
2. **Relacja pusta** (żadne elementy nie są w relacji) – $R = \emptyset \subseteq X \times Y$;
3. **Relacja identyczności** (równości) – $I_X = id_X$:

   $I_X \subseteq X \times X$, $\quad x\, I_X\, y \Leftrightarrow x = y$, $\quad R \circ I_X = R$.

Podstawowe własności relacji

Def. *O relacji* $R \subseteq X \times X$ *mówimy, że jest:*

1. ***zwrotna*** $\Leftrightarrow \forall x \in X \;\; x\,R\,x$
2. ***symetryczna*** $\Leftrightarrow \forall x, y \;\; (x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x)$
3. ***antysymetryczna*** $\Leftrightarrow \forall x, y \;\; [(x\,R\,y \wedge y\,R\,x) \Rightarrow x = y]$
4. ***spójna*** $\Leftrightarrow \forall x, y \;\; (x\,R\,y \vee y\,R\,x \vee x = y)$.
5. ***przechodnia*** $\Leftrightarrow \forall x, y, z \;\; [(x\,R\,y \wedge y\,R\,z) \Rightarrow x\,R\,z]$

Operacje na relacjach

Niech $R_1, R_2 \subseteq X^2$ – relacje. Definiujemy następujące operacje:

- suma relacji – $R_1 \cup R_2 : \;\; x\,(R_1 \cup R_2)\,y \Leftrightarrow x\,R_1\,y \vee x\,R_2\,y$;
- przecięcie relacji – $R_1 \cap R_2 : \;\; x\,(R_1 \cap R_2)\,y \Leftrightarrow x\,R_1\,y \wedge x\,R_2\,y$;
- dopełnienie relacji – $X^2 \setminus R_1 : \;\; x\,(X^2 \setminus R_1)\,y \Leftrightarrow \neg\, x\,R_1\,y$.

Relacje równoważności

Relacje równoważności pozwalają utożsamiać (grupować) obiekty mające wspólną wybraną cechę.

Def. *Relacja* ϱ *w zbiorze* X *jest* ***relacją równoważności****, jeśli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.*

Stosujemy oznaczenia: $x \sim y, \;\; x \approx y, \;\; x \equiv y$.

Def. *Niech* ϱ *– relacja równoważności w zbiorze* $X \neq \emptyset$.

Klasą abstrakcji *elementu* $x \in X$ *względem relacji* ϱ *nazywamy zbiór:*

$$[x]_\varrho = \{y \in X : \; x\,\varrho\,y\}, \qquad a \in [x]_\varrho \Leftrightarrow x\,\varrho\,a$$

Każdy element $a \in [x]_\varrho$ jest **reprezentantem** tej klasy abstrakcji.

Def. ***Zbiorem ilorazowym relacji*** ϱ *nazywamy zbiór wszystkich klas abstrakcji względem relacji* ϱ*:*

$$X/_\varrho := \{[x]_\varrho : \;\; x \in X\}$$

Tw. *Jeżeli ϱ jest relacją równoważności w zbiorze X, to:*

1. $\forall x \in X \;\; x \in [x]_\varrho$
2. $\forall x, y \in X \;\; ([x]_\varrho = [y]_\varrho \Leftrightarrow x \,\varrho\, y)$
3. $\forall x, y \in X \;\; ([x]_\varrho \neq [y]_\varrho \Rightarrow [x]_\varrho \cap [y]_\varrho = \emptyset)$
4. $\bigcup_{x\in X} [x]_\varrho = X$
5. $\forall x, y \in X \;\; y \in [x]_\varrho \Rightarrow x \in [y]_\varrho$.

Def. *Niech $X \neq \emptyset$. Rodzinę $\mathcal{A} = \{A_i : \;\; i \in I\} \subseteq 2^X$ nazywamy* ***podziałem zbioru X****, jeśli spełnione są następujące warunki:*

1. $\forall A_i \in \mathcal{A} \;\;\; A_i \neq \emptyset$
2. $\forall A_i, A_j \in \mathcal{A} \;\;\; A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$
3. $\bigcup_{i\in I} A_i = X$.

Tw. *Jeżeli ϱ jest relacją równoważności w zbiorze X, to zbiór ilorazowy $X/_\varrho$ jest podziałem zbioru X, ponadto jeśli $\mathcal{A}$ jest podziałem zbioru X, to relacja $\varrho_\mathcal{A}$ na zbiorze X określona następująco:*

$$x \,\varrho_\mathcal{A}\, y \Leftrightarrow \exists A_i \in \mathcal{A} \;\; (x \in A_i \wedge y \in A_i)$$

jest relacją równoważności.