Wielomiany

Def. **Wielomianem stopnia** $n \in \mathbb{N}_0$ o współczynnikach z ciała liczbowego $\mathbb{K}$ nazywamy funkcję $w : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ określoną wzorem

$$w(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n, \quad \text{gdzie } a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{K},\ a_n \neq 0.$$

Liczby $a_0, a_1, ..., a_n$ nazywamy **współczynnikami** wielomianu w.
Funkcję $w(t) \equiv 0$ nazywamy **wielomianem zerowym**.
Przyjmujemy,że stopień wielomianu zerowego jest równy $-\infty$
Wielomiany stopnia mniejszego niż 1 nazywamy **wielomianami stałymi**.

Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$ oznaczamy $\mathbb{K}[t]$.
Stopień wielomianu w oznaczamy $deg(w)$ lub $st(w)$.
W zbiorze wielomianów definiujemy działanie dodawania i mnożenia.

Def. **Sumą** wielomianów $w_1, w_2 \in \mathbb{K}[t]$ nazywamy wielomian $w_1 + w_2 \in \mathbb{K}[t]$, taki że $(w_1 + w_2)(t) = w_1(t) + w_2(t)$ dla każdego $t \in \mathbb{K}$.

Def. **Iloczynem** wielomianów $w_1, w_2 \in \mathbb{K}[t]$ nazywamy wielomian $w_1 \cdot w_2 \in \mathbb{K}[t]$, taki że $(w_1 \cdot w_2)(t) = w_1(t) \cdot w_2(t)$ dla każdego $t \in \mathbb{K}$.

Def. Mówimy, że wielomian $w \in \mathbb{K}[t]$ jest **rozkładalny** nad ciałem $\mathbb{K}$, jeśli istnieją wielomiany $w_1, w_2 \in \mathbb{K}[t]$ o dodatnich stopniach, takie że $w = w_1 \cdot w_2$.
W przeciwnym wypadku wielomian $w \in \mathbb{K}[t]$ nazywamy **nierozkładalnym**.

W zbiorze wielomianów $\mathbb{K}[t]$ wykonalne jest **dzielenie z resztą**, tzn.
dla dowolnych wielomianów $w, p \in \mathbb{K}[t]$, gdzie p nie jest wielomianem zerowym,
istnieją jednoznacznie określone wielomiany $q, r \in \mathbb{K}[t]$, takie że dla każdego $t \in \mathbb{K}$
zachodzi równość
$w(t) = p(t) \cdot q(t) + r(t)$, gdzie r jest wielomianem niższego stopnia niż p.

Wielomian r nazywamy **resztą** z dzielenia wielomianu w przez wielomian p.
Mówimy, że wielomian w jest **podzielny** przez wielomian p, jeśli r jest wielomianem zerowym.

Tw. (o dzieleniu z resztą). Dla dowolnego wielomianu $w \in \mathbb{K}[t]$ i dowolnego $a \in \mathbb{K}$
reszta z dzielenia wielomianu w przez wielomian $(t - a)$ jest równa $w(a)$.

Def. Liczbę $t_0 \in \mathbb{K}$ nazywamy **pierwiastkiem wielomianu** $w \in \mathbb{K}[t]$, jeśli $w(t_0) = 0$.

Tw. Bézout (wniosek z tw. o reszcie). Element $t_0 \in \mathbb{K}$ jest pierwiastkiem wielomianu $w \in \mathbb{K}[t]$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian w jest podzielny przez wielomian $(t - t_0)$.

Def. Liczbę $t_0 \in \mathbb{K}$ nazywamy k-**krotnym pierwiastkiem wielomianu** $w \in \mathbb{K}[t]$ $(k \in \mathbb{N})$, jeśli istnieje wielomian $q \in \mathbb{K}[t]$, taki że dla każdego $t \in \mathbb{K}$ zachodzi $w(t) = (t-t_0)^k \cdot q(t)$ i $q(t_0) \neq 0$.

Tw. (**Zasadnicze twierdzenie algebry**)
Każdy wielomian $w \in \mathbb{C}[z]$ różny od wielomianu stałego ma pierwiastek $z_0 \in \mathbb{C}$.

Wniosek 1. Każdy wielomian $w \in \mathbb{C}[z]$ stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (uwzględniając pierwiastki wielokrotne).

Wniosek 2. Każdy wielomian $w \in \mathbb{C}[z]$ dodatniego stopnia można rozłożyć na czynniki liniowe (które ewentualnie mogą w rozkładzie wystąpić więcej niż raz).

Tw. Jeżeli wszystkie współczynniki wielomianu $w \in \mathbb{C}[z]$ są liczbami rzeczywistymi i liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu w, to $\overline{z}_0$ jest również pierwiastkiem wielomianu w.

Uwaga: $(x - z_0) \cdot (x - \overline{z_0}) = x^2 - 2\mathrm{Re}\, z_0 \cdot x + |z_0|^2$
(jest to wielomian o współczynnikach rzeczywistych, $\Delta < 0$)

Wniosek. Każdy wielomian $w \in \mathbb{R}[x]$ dodatniego stopnia można rozłożyć na iloczyn wielomianów pierwszego stopnia oraz nierozkładalnych wielomianów drugiego stopnia.

Funkcje wymierne i ułamki proste

Def. **Funkcją wymierną** nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy funkcję postaci

$$\frac{f(t)}{g(t)}, \quad \text{gdzie } f, g \in \mathbb{K}[t] \ \text{ i } deg(g) > 0.$$

Funkcję wymierną nazywamy **właściwą**, jeśli $deg(f) < deg(g)$.

Uwaga. Każda funkcja wymierna jest sumą wielomianu oraz funkcji wymiernej właściwej.

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{p(t) \cdot g(t) + r(t)}{g(t)} = p(t) + \frac{r(t)}{g(t)}, \quad deg(r) < deg(g).$$

Def. Funkcję wymierną nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy **ułamkiem prostym**, jeśli ma postać

$$\frac{f(t)}{(h(t))^k}, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{N},\ deg(f) < deg(h),\ \ h \text{ – wielomian nierozkładalny w } \mathbb{K}[t].$$

Def. Zespolonym ułamkiem prostym nazywamy zespoloną funkcję wymierną postaci:
$$\frac{A}{(z+a)^n}, \quad \text{gdzie } A, a \in \mathbb{C} \text{ oraz } n \in \mathbb{N}.$$

Def. Rzeczywistym ułamkiem prostym pierwszego rodzaju nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci: $\dfrac{A}{(x+a)^n}$, gdzie $A, a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

Def. Rzeczywistym ułamkiem prostym drugiego rodzaju nazywamy rzeczywistą funkcję wymierną postaci: $\dfrac{Ax+b}{(x^2+px+q)^n}$,
gdzie $A, B, p, q \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, przy czym $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

Tw. Każda właściwa funkcja wymierna nad ciałem $\mathbb{K}$ rozkłada się w sposób jednoznaczny na sumę ułamków prostych nad ciałem $\mathbb{K}$.

1. Zespolona funkcja wymierna właściwa

$$\frac{P(z)}{c_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\dots(z-z_m)^{k_m}}$$

jest sumą $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ zespolonych ułamków prostych, przy czym czynnikowi $(z - z_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych postaci:

$$\frac{A_{i1}}{z-z_i} + \frac{A_{i2}}{(z-z_i)^2} + \ldots + \frac{A_{ik_i}}{(z-z_i)^{k_i}},$$

gdzie stałe $A_\square$ są liczbami zespolonymi.

2. Rzeczywista funkcja wymierna właściwa

$$\frac{P(x)}{a_n(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_s+q_s)^{l_s}}$$

jest sumą $k_1+\ldots+k_m$ rzeczywistych ułamków prostych I rodzaju oraz $l_1+\ldots+l_s$ rzeczywistych ułamków prostych II rodzaju, przy czym czynnikowi $(x - x_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych I rodzaju postaci:

$$\frac{A_{i1}}{x-x_i} + \frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{A_{ik_i}}{(x-x_i)^{k_i}},$$

a czynnikowi $(x^2 + p_jx + q_j)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych II rodzaju postaci:

$$\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2+p_jx+q_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2} + \ldots + \frac{B_{jl_j}x + C_{jl_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}},$$

gdzie stałe $A_\square, B_\square, C_\square$ są liczbami rzeczywistymi.

Wyznaczanie rozkładu funkcji wymiernej na sumę ułamków prostych — metoda współczynników nieoznaczonych

1. Daną funkcję wymierną właściwą zapisujemy w postaci nieskracalnego ułamka z mianownikiem w postaci iloczynu potęg wielomianów nierozkładalnych.

2. Zapisujemy przewidywaną postać rozkładu na sumę ułamków prostych (liczniki zapisujemy w postaci nieoznaczonej - nieznane współczynniki).

3. Dodajemy ułamki proste, sprowadzając je do wspólnego mianownika.

4. Porównujemy liczniki zadanej funkcji wymiarnej oraz otrzymanej sumy ułamków prostych. Współczynniki przy tych samych potęgach mają być jednakowe. Rozwiązujemy układ n równań z n nieznanymi współczynnikami (n jest stopniem mianownika zadanej funkcji wymiernej)

Uwaga: W przypadku, gdy mianownik rozkładanej funkcji wymiernej ma jedynie pojedyncze pierwiastki, uzyskujemy rozkład:

$$\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_k}{x-x_k}$$

i wtedy

$f(x) = A_1(x-x_2)\cdots(x-x_k) + A_2(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_k) + \ldots + A_k(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$.

Wstawiając do otrzymanej równości kolejne wartości x_i, wyznaczymy łatwo współczynniki $A_1, \ldots, A_k$.