Liczby zespolone

Def. **Liczbą zespoloną** nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$.

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \text{ oraz } y_1 = y_2)$.

Równość liczb zespolonych to równość odpowiednich współrzędnych.

Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$.

W zbiorze tym definiujemy dwa działania: dodawanie i mnożenie.

Niech $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$.

Dodawanie liczb zespolonych: $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Mnożenie liczb zespolonych: $z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$.

Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych to działania łączne i przemienne,
mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Liczba $(0, 0)$ jest elementem neutralnym dodawania, gdyż $(0, 0) + (x, y) = (x, y) + (0, 0) = (x, y)$
a liczba $(1, 0)$ jest elementem neutralnym mnożenia, gdyż $(1, 0) \cdot (x, y) = (x, y) \cdot (1, 0) = (x, y)$.

Uwaga: Algebra $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem, podobnie jak $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi
$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$ oraz $(x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y, 0)$.

Zbiór $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ utożsamiamy ze zbiorem liczb rzeczywistych.
Zamiast $(x, 0)$ piszemy x.

Def. Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy **jednostką urojoną** i oznaczamy j.

Otrzymujemy $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + j \cdot y$.

Uwaga: $j^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$

Postać algebraiczna (**kanoniczna**) liczby zespolonej (x, y) to $z = x + jy$, $(x, y \in \mathbb{R})$

część rzeczywista $\operatorname{Re} z = x$

część urojona $\operatorname{Im} z = y$

Uwaga. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ *i* $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$

Uwaga. $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$ oraz $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$
dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Działania na liczbach zespolonych w postaci kanonicznej

Niech $z_1 = x_1 + jy_1, \quad z_2 = x_2 + jy_2$, wtedy

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
2. $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
3. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \dfrac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ dla $z_2 \neq 0$.

Def. **Sprzężeniem** liczby zespolonej $z = x + jy$, $x, y \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę $\overline{z} = x - jy$.

Własności sprzężenia Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, wtedy

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2; \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2; \quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}; \quad \overline{(\overline{z})} = z.$

Def. **Modułem** liczby zespolonej $z = x + jy$, $x, y \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

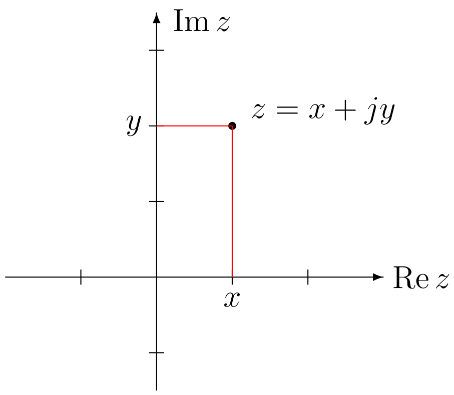
Własności modułu Niech $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$, wtedy

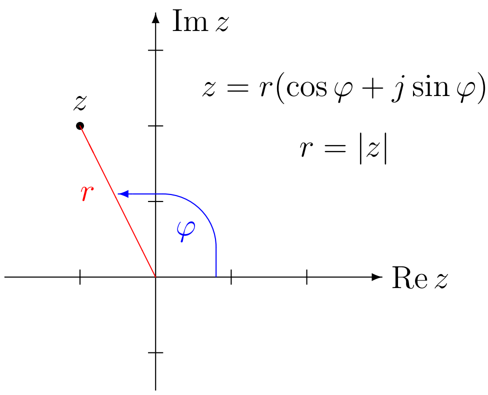
$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0; \quad |z| = |\overline{z}|; \quad |z|^2 = z \cdot \overline{z}$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, gdy $z_2 \neq 0$.

Interpretacja geometryczna

Liczbę $z = x + jy$, możemy przedstawić na płaszczyźnie jako punkt o współrzędnych (x, y).





Moduł liczby z jest odległością tego punktu od punktu $(0, 0)$, czyli liczby zespolonej 0.

Wielkość $|z_1 - z_2|$ jest odległością między liczbami z_1 i z_2.

Miarę φ kąta skierowanego utworzonego przez dodatnią półoś osi rzeczywistej i odcinek łączący $z \neq 0$ z początkiem układu współrzędnych nazywamy **argumentem** liczby z. Zbiór wszystkich argumentów liczby z oznaczamy $\operatorname{Arg} z$.

Argumenty danej liczby zespolonej różnią się o całkowitą wielokrotność liczby 2π.

Argument liczby z nazywamy **argumentem głównym**, jeśli należy do przedziału $(-\pi, \pi]$. Argument główny oznaczamy $\arg z$.

Uwaga: Argument główny liczby $z \neq 0$ to taka liczba $\varphi \in (-\pi, \pi]$,
dla której $\cos\varphi = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ i $\sin\varphi = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}$.

Jeśli $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, to zachodzi równość $\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = \operatorname{tg}\varphi$

Uwaga: Czasem (w niektórych podręcznikach) przyjmuje się, że argument główny jest liczbą z przedziału $[0, 2\pi)$.

Argument liczby zespolonej 0 nie jest określony.

Uwaga: Czasem (w niektórych podręcznikach) przyjmuje się, że argumentem liczby 0 jest 0.

Dowolną liczbę $z \neq 0$ możemy zapisać w **postaci trygonometrycznej**

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi),$$

gdzie $r = |z|$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.

Uwaga. Postać trygonometryczna liczby zespolonej nie jest określona jednoznacznie.

Niech $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$, $r_1, r_2 > 0$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.

Wówczas $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (r_1 = r_2$ i istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi)$

Działania na liczbach zespolonych w postaci trygonometrycznej

Niech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$, $z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

iloczyn: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

iloraz: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

potęgowanie: $z^n = |z|^n[\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)]$, dla $n \in \mathbb{N}$ (wzór Moivre'a)

sprzężenie: $\overline{z} = |z|(\cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi))$

przeciwna: $-z = |z|(\cos(\varphi + \pi) + j\sin(\varphi + \pi))$.

Uwaga: Jeśli $|z| = 1$, to $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

Wzory Eulera:

$$e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy}, \quad e^{jy} = \cos y + j\sin y, \ (x, y \in \mathbb{R}).$$

Dowolną liczbę zespoloną $z \neq 0$ można wyrazić w **postaci wykładniczej**:

$$z = re^{j\varphi},$$

gdzie $r = |z|$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.

Uwaga: $e^{j\pi} = -1$

Pierwiastki z liczb zespolonych

Niech $n \in \mathbb{N}$.

Def. Liczbę $t \in \mathbb{C}$ nazywamy **pierwiastkiem** stopnia n z liczby $z \in \mathbb{C}$, jeśli $t^n = z$.

Uwaga. Dla dowolnego n jedynym pierwiastkiem stopnia n z liczby 0 jest 0.

Twierdzenie.

Jeśli $z \neq 0$, to istnieje dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n z liczby z. Pierwiastki stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby $z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in \mathbb{R}$, wyrażają się wzorami:

$$t_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Pierwiastek stopnia n z liczby zespolonej $z \neq 0$, który ma najmniejszy nieujemny argument nazywamy **pierwiastkiem głównym** stopnia n z liczby z.

Uwaga. Pierwiastki stopnia $n \geqslant 2$ z liczby zespolonej $z \neq 0$ znajdują się na okręgu o środku w 0 i promieniu równym $\sqrt[n]{|z|}$, i dzielą ten okrąg na n równych łuków.

Symbolem $\sqrt[n]{z}$ oznaczamy zbiór wszystkich pierwiastków n-tego stopnia z liczby z.

$\sqrt[n]{z} = \{t \in \mathbb{C} : \ t^n = z\}$

Pierwiastki n-tego stopnia z 1 będziemy umownie oznaczać symbolami ω_k, $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$.

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + j\sin\frac{2k\pi}{n} = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + j\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = \omega_1^k$$

Fakt. Niech $t \in \mathbb{C}$ będzie dowolnym pierwiastkiem stopnia n z liczby $z \neq 0$.

Wówczas $\sqrt[n]{z} = \{t \cdot \omega_k : k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$.

Uwaga. Zbiór wszystkich pierwiastków stopnia n z 1 oznaczamy $\mathbb{C}_n$.

Algebra $(\mathbb{C}_n, \cdot)$ jest grupą.