Logika klasyczna to nauka, która ustala reguły badania prawdziwości stwierdzeń oraz reguły dowodzenia twierdzeń.

Rachunek zdań

Zdanie logiczne jest to zdanie oznajmujące, któremu można przypisać określoną wartość logiczną.

W logice klasycznej zdania dzielimy na prawdziwe (przypisujemy im wartość 1) oraz fałszywe (o wartości logicznej 0).

Podstawowe **funktory zdaniotwórcze**:

negacja	$\sim, \neg$	"nieprawda, że"
koniunkcja	$\wedge$	"i"
alternatywa	$\vee$	"lub"
implikacja	$\Rightarrow$	"jeśli...to..."
równoważność	$\Leftrightarrow$	"wtedy i tylko wtedy, gdy"

W implikacji $p \Rightarrow q$ zdanie p nazywamy **poprzednikiem implikacji**, zdanie q - **następnikiem**.

p	$\sim p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Tautologiami – prawami rachunku zdań nazywamy formuły, które są prawdziwe niezależnie od wartości logicznej zdań składowych, które w nich występują.

Zdania logiczne Φ i Ψ są **równoważne**, jeśli zdanie $\Phi \Leftrightarrow \Psi$ jest tautologią.

Jeśli prawdziwa jest implikacja $p \Rightarrow q$, to mówimy, że p jest **warunkiem wystarczającym** dla q oraz q jest **warunkiem koniecznym** dla p.

Jeśli prawdziwa jest równoważność $p \Leftrightarrow q$, to mówimy, że p jest **warunkiem koniecznym i wystarczającym** dla q.

Ważniejsze prawa rachunku zdań

- $p \Leftrightarrow \neg\neg p$ (prawo podwójnego przeczenia)
- $p \vee \neg p$ (prawo wyłączonego środka)
- $\neg(p \wedge \neg p)$ (prawo sprzeczności)
- $\begin{array}{l} \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \\ \neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \end{array}$ (prawa de Morgana)
- łączność alternatywy i łączność koniunkcji

- przemienność alternatywy oraz koniunkcji
- $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ (rozdzielność koniunkcji względem alternatywy)
- $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ (rozdzielność alternatywy wzgledem koniunkcji)
- $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (prawo przechodniości implikacji)
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$ prawo eliminacji równoważności

Powyższe prawa są wykorzystywane przy dowodzeniu twierdzeń.

Funkcje zdaniowe

Def. 1. ***Funkcja zdaniowa jednej zmiennej****, to wyrażenie $\phi(x), x \in X \neq \emptyset$, które staje się zdaniem (prawdziwym lub fałszywym), gdy za zmienną x wstawimy element zbioru X. Zbiór X nazywamy* ***zakresem zmienności*** *funkcji ϕ. Mówimy, że $x_0 \in X$* ***spełnia funkcję zdaniową*** *$\phi(x)$, jeśli $\phi(x_0)$ jest zdaniem prawdziwym.*

Zbiór elementów spełniających funkcję zdaniową ϕ oznaczamy
$\{x \in X : \phi(x)\} = \{x \in X : \phi(x)$ jest zdaniem prawdziwym $\}$.

Kwantyfikatory

Niech $\phi(x)$ będzie funkcją zdaniową zmiennej $x \in X \neq \emptyset$.

Def. 2. ***Kwantyfikator ogólny (uniwersalny)*** *jest oznaczany symbolem $\forall$.*
Napis $(\forall x \in X)\phi(x)$ – czytamy: dla każdego x ze zbioru X zachodzi $\phi(x)$.

Uwaga: $(\forall x \in X)\phi(x) \Leftrightarrow \{x \in X : \phi(x)\} = X$.

Def. 3. ***Kwantyfikator szczegółowy (egzystencjalny)*** *jest oznaczany symbolem $\exists$.*
Napis $(\exists x \in X)\phi(x)$ – czytamy: istnieje x ze zbioru X spełniający formułę $\phi(x)$.

Uwaga: $(\exists x \in X)\phi(x) \Leftrightarrow \{x \in X : \phi(x)\} \neq \emptyset$.

Uwaga: Kwantyfikator $\forall(\bigwedge)$ jest uogólnieniem spójnika koniunkcji, zaś kwantyfikator $\exists(\bigvee)$ jest uogólnieniem alternatywy.

Zakresem kwantyfikatora nazywamy zakres zmiennej funkcji zdaniowej, której on dotyczy. Mówimy, że kwantyfikatory $(\forall x \in X)$ i $(\exists x \in X)$ **wiążą** zmienną x. Zmienną x w wyrażeniu nazywamy **związaną**, jeśli wiąże ją jakiś kwantyfikator. Zmienną która nie jest związana, nazywamy **zmienną wolną**.

Często zdarza się, że wybieramy zmienne z pewnego podzbioru zakresu kwantyfikatora. W takiej sytuacji wygodnie jest korzystać z **kwantyfikatorów ograniczonych** (zrelatywizowanych).

Def. 4. *Niech $\phi(x)$ będzie funkcją zdaniową zmiennej $x \in X$ i niech $A \subseteq X$. Kwantyfikatory ograniczone do zbioru A definiujemy następująco:*

- $(\forall x \in A)\phi(x) \Leftrightarrow \forall x \in X(x \in A \Rightarrow \phi(x))$
- $(\exists x \in A)\phi(x) \Leftrightarrow \exists x \in X(x \in A \wedge \phi(x))$.

Prawa rachunku kwantyfikatorów

Def. 5. *Zdanie (zapisane z użyciem kwantyfikatorów) nazywamy* ***prawem rachunku kwantyfikatorów****, gdy jest prawdziwe dla dowolnej interpretacji występujących w nim symboli i funkcji zdaniowych.*

Tw. 1. *Niech* $\phi(x), \psi(x)$ *– funkcje zdaniowe o zakresie zmiennej* $x \in X \neq \emptyset$. *Wtedy:*

1. $\forall x \phi(x) \Rightarrow \exists x \phi(x)$,
2. $\neg(\forall x)\phi(x) \Leftrightarrow \exists x(\neg\phi(x))$
 $\neg(\exists x)\phi(x) \Leftrightarrow \forall x(\neg\phi(x))$ *prawa de Morgana*
3. $\forall x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \Leftrightarrow \forall x\phi(x) \wedge \forall x\psi(x)$ *rozdzielność kwantyfikatora ogólnego względem koniunkcji*
4. $\exists x(\phi(x) \vee \psi(x)) \Leftrightarrow \exists x\phi(x) \vee \exists x\psi(x)$ *rozdzielność kwantyfikatora szczegółowego względem alternatywy*
5. $\exists x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \Rightarrow \exists x\phi(x) \wedge \exists x\psi(x)$
6. $\forall x\phi(x) \vee \forall x\psi(x) \Rightarrow \forall x(\phi(x) \vee \psi(x))$.

Uwaga: Dla kwantyfikatorów ograniczonych zachodzą te same prawa.

Prawa włączania i wyłączania kwantyfikatorów

Tw. 2. *Niech* $\phi(x)$ *– funkcja zdaniowa o zakresie zmiennej* $x \in X \neq \emptyset$, β *– zdanie,* $\diamond$ *niech oznacza wybrany spójnik logiczny* $\wedge, \vee, \Rightarrow$. *Wtedy:*

1. $\forall x(\beta \diamond \phi(x)) \Leftrightarrow \beta \diamond \forall x\phi(x)$ *oraz* $\forall x(\phi(x) \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\exists x\phi(x) \Rightarrow \beta)$
2. $\exists x(\beta \diamond \phi(x)) \Leftrightarrow \beta \diamond \exists x\phi(x)$ *oraz* $\exists x(\phi(x) \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\forall x\phi(x) \Rightarrow \beta)$

Prawa przestawiania kwantyfikatorów

Tw. 3. *Niech* $\phi(x, y)$ *będzie funkcją zdaniową o zakresie zmiennych* $x \in X, y \in Y$. *Wtedy:*

1. $\forall x \forall y \phi(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x \phi(x, y)$ *– przemienność kwantyfikatorów ogólnych*
2. $\exists x \exists y \phi(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x \phi(x, y)$ *– przemienność kwantyfikatorów szczegółowych*
3. $\exists x \forall y \phi(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x \phi(x, y)$.

Zasada indukcji matematycznej

Tw. 4. *Niech* $\phi(n)$ *– funkcja zdaniowa zmiennej* $n \in \mathbb{N}$. *Jeżeli istnieje liczba* $n_0 \in \mathbb{N}$ *taka, że*

Z1: $\phi(n_0)$ *jest zdaniem prawdziwym,*

Z2: *dla każdego* $k \geqslant n_0$ *prawdziwa jest implikacja* $\phi(k) \Rightarrow \phi(k+1)$,

to $\phi(n)$ *jest zdaniem prawdziwym dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant n_0$.