Wyznacznik

Def. **Permutacją** zbioru $\{1, ..., n\}$ nazywamy bijekcję $\sigma : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$.

Zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, ..., n\}$ oznaczamy symbolem S_n.

Permutację zapisujemy $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Uwaga. Dla zbioru n-elementowego istnieje dokładnie $n!$ permutacji.

Niech σ będzie permutacją zbioru $\{1, ..., n\}$, $k, m \in \{1, ..., n\}$.

Def. Parę $(\sigma(k), \sigma(m))$ nazywamy **inwersją** permutacji σ, jeśli $k < m$ i $\sigma(k) > \sigma(m)$.

Przykład 1. Niech $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$

Inwersje tej permuacji to: $(3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2), (5, 4), (6, 2), (6, 4)$.

Def. **Znakiem permutacji** σ nazywamy liczbę $(-1)^r$, gdzie r jest liczbą inwersji permutacji σ. Znak permutacji σ oznaczamy symbolem $\mathrm{sgn}\,(\sigma)$.

Permutację σ nazywamy **parzystą**, jeśli $\mathrm{sgn}\,(\sigma) = 1$.
Permutację nazywamy **nieparzystą**, jeśli $\mathrm{sgn}\,(\sigma) = -1$.

Znak permutacji z przykladu 1. jest równy -1, permutacja σ jest nieparzysta.

Def. **Wyznacznikiem macierzy** $[a_{ij}]_{n\times n}$ nad $\mathbb{K}$ nazywamy element ciała $\mathbb{K}$ zdefiniowany wzorem

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot ... \cdot a_{n,\sigma(n)}.$$

Wyznacznik macierzy $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ oznaczamy symbolem $\det A$, $\det[a_{ij}]$ lub $\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Uwaga: Wyznacznik można obliczyć jedynie dla macierzy kwadratowych.

Uwaga: Suma w wyznaczniku składa się z $n!$ składników, połowa jest ze znakiem $+$, a połowa ze znakiem $-$. Każdy składnik jest iloczynem n czynników, po jednym z każdego wiersza i z każdej kolumny.

Przykład 2. Znane są i łatwe do zapamiętania wzory na wyznaczniki macierzy stopnia 2 i 3. Są to tak zwane wzory Sarrusa:

1. $\det[a] = a$ 2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$

3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{matrix}$

Dla macierzy wymiaru większego niż 3 rzadko oblicza się wyznacznik z definicji. Raczej tylko w przypadku tzw. macierzy rzadkich (takich których większość wyrazów to zera).

Przyklad 3. Przy obliczaniu wyznacznika macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & \underline{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & \underline{2} \\ 3 & 3 & \underline{4} & 0 \\ \underline{4} & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

należałoby dodać 4! składników i dla każdego z nich wyliczyć znak związanej z nim permutacji.

Jednym z tych składników byłby np. iloczyn $a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{33} \cdot a_{41} \cdot \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = 64.$

Uwaga: Korzystając z definicji łatwo można wyprowadzić proste wzory na wyznaczniki macierzy <u>trójkątnych</u> i <u>diagonalnych</u>.

Wyznacznik macierzy $[a_{ij}]_{n\times n}$ trójkątnej lub diagonalnej jest równy iloczynowi jej wyrazów z głównej przekątnej.

W takim przypadku $\det[a_{ij}]_{n\times n} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$

Przykład 4. $\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & j & 0 & 0 \\ 7-j & 3+2j & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2j & 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot j \cdot (-1) \cdot 1 = -3j$

Tw. Dla dowolnej macierzy kwadratowej A zachodzi równość $\det A = \det A^T$.

Tw. Cauchy'ego. Dla $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zachodzi równość

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Wniosek. Dla dowolnej macierzy kwadratowej A zachodzi równość $\det(A^m) = (\det A)^m$.

Przykład 5. Niech $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ macierz taka, że $\det A = -2$.

Wtedy np. $\det(A^2) = (\det A)^2 = (-2)^2 = 4$,

$$\det(3\cdot A) = \det(3\cdot I_3\cdot A) = \det(3\cdot I_3)\cdot \det A = \det\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\cdot \det A = 3^3\cdot(-2) = -54.$$

Wyznacznik macierzy blokowej

Macierzą blokową nazywamy macierz postaci $\left[\begin{array}{c|c} A & C\\ \hline \mathbf{0} & B\end{array}\right]$ lub $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0}\\ \hline D & B\end{array}\right]$,

gdzie segmenty A i B to podmacierze kwadratowe, a segment $\mathbf{0}$ jest podmacierzą samych zer.

Dla macierzy blokowych zachodzi wzór: $\det\left[\begin{array}{c|c} A & C\\ \hline \mathbf{0} & B\end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{0}\\ \hline D & B\end{array}\right] = \det A\cdot \det B$.

Przykład 6.

$$\left|\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 6 & 7 & 8\\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\cdot\left|\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0\\ \hline 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} = (1-4)\cdot 2\cdot(4-3) = -6.$$

Własności wyznaczników

1. Wyznacznik macierzy, w której wiersze (kolumny) są liniowo zależne jest równy 0.

Z tego wynika, że równy 0 będzie wyznacznik macierzy

- która ma wiersz lub kolumnę składającą się z samych zer;
- w której występują dwa jednakowe wiersze lub kolumny;
- w której jeden wiersz (kolumna) jest kombinacją liniową innych wierszy (kolumn).

Przykład 7.

$$\begin{vmatrix} 1 & \underline{0} & 5\\ 2 & \underline{0} & 3\\ 3 & 0 & 7\end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \underline{2} & \underline{1} & \underline{5}\\ 3 & 2 & 0\\ \underline{2} & \underline{1} & \underline{5}\end{vmatrix} = 0, \quad (w_1 = w_3) \qquad \begin{vmatrix} \underline{3} & 0 & \underline{-6}\\ \underline{0} & 3 & \underline{0}\\ \underline{1} & 5 & \underline{-2}\end{vmatrix} = 0, \quad (k_3 = -2k_1).$$

2. Wyznacznik macierzy jest jednorodną i addytywną funkcją wierszy i kolumn macierzy.
W szczególności z dowolnego wiersza (kolumny) można wyłączyć różną od zera stałą przed wyznacznik.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underline{\alpha} a_{i1} & \dots & \underline{\alpha} a_{ij} & \dots & \underline{\alpha} a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underline{\alpha} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \underline{\alpha} a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & \underline{\alpha} a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \underline{\alpha} a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Wniosek. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Wtedy $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

Przykład 8.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+j & 4 \\ 2 & 2+j & 5 \\ 3 & 3+j & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{1} & \underline{1} & 4 \\ \underline{2} & \underline{2} & 5 \\ \underline{3} & \underline{3} & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \underline{j} & 4 \\ 2 & \underline{j} & 5 \\ 3 & \underline{j} & 6 \end{vmatrix} = 0 + j \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = j \cdot \left(\begin{vmatrix} \underline{1} & 1 & \underline{1} \\ \underline{2} & 1 & \underline{2} \\ \underline{3} & 1 & \underline{3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \underline{1} & \underline{3} \\ 2 & \underline{1} & \underline{3} \\ 3 & \underline{1} & \underline{3} \end{vmatrix} \right) = 0$$

3. Przestawienie dwóch wierszy (kolumn) powoduje, że wyznacznik zmienia znak na przeciwny.

Przykład 9.

$$\begin{vmatrix} 5 & 1+j & 3 \\ 2-j & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2-j & 2 & 0 \\ 5 & 1+j & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = -6$$

4. Wartość wyznacznika nie zmienia się, jeśli do wiersza (kolumny) dodamy wielokrotność innego wiersza (kolumny).

Przykład 10.

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ 10 & 8 & 6 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal{(w_4 - 2w_1)} \left|\begin{array}{c|cc|c} 5 & 4 & 3 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right| = |5| \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \cdot |1| = 5 \cdot 10 \cdot 1 = 50$$

Def. Macierz kwadratową A nazywamy **nieosobliwą**, jeśli $\det A \neq 0$.
W przeciwnym wypadku macierz kwadratową A nazywamy **osobliwą**.

Def. **Dopełnieniem algebraicznym wyrazu** a_{ij} macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ nazywamy skalar

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det B_{ij},$$

gdzie B_{ij} jest macierzą otrzymaną z macierzy A poprzez usunięcie jej i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Przykład 11.

Dla macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ przykładowe dopełnienia algebraiczne:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 4 = -4,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) = -3.$$

Tw. Laplace'a. Dla dowolnej macierzy $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ oraz $i, j \in \{1, ..., n\}$ zachodzą równości

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in}$$

(rozwinięcie Laplace'a względem i-tego wiersza)

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + ... + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

(rozwinięcie Laplace'a względem j-tej kolumny)

Przykład 12.

Rozwinięcie wyznacznika względem pierwszego wiersza:

$$\begin{vmatrix} \underline{1} & \underline{0} & \underline{2} & \underline{0} \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14} = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Rozwinięcie wyznacznika względem trzeciej kolumny:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \underline{2} & 0 \\ 0 & 2 & \underline{0} & 1 \\ 3 & 4 & \underline{0} & 0 \\ 5 & 0 & \underline{4} & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 4 \cdot A_{43} = 2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Def. Niech $[A_{ij}]$ będzie macierzą, której wyrazami są dopełnienia algebraiczne wyrazów a_{ij} macierzy A. Macierz $[A_{ij}]^T$ nazywamy **macierzą dołączoną** macierzy A i oznaczamy A^D.

Przykład 13. Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Macierz dołączona macierzy A to:

$$A^D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tw. Dla dowolnej macierzy kwadratowej A zachodzi równość $A \cdot A^D = A^D \cdot A = (\det A) \cdot I$.

Wniosek. Jeśli A jest macierzą kwadratową nieosobliwą, to $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^D$.

Wniosek. Macierz kwadratowa jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa.

Wniosek. Jeśli macierz A jest odwracalna, to $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Przykład 14. Możemy łatwo wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy A z przykładu 13.

$$\det A = \det \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = 2,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^D = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przykład 15. Wyprowadzimy wzór na macierz odwrotną macierzy stopnia 2.

Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc, \quad A^D = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Otrzymujemy wzór (prawdziwy, gdy $ad - bc \neq 0$)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy

Def. **Minorem stopnia** k macierzy $A_{m\times n}$ nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej otrzymanej z A poprzez wykreślenie $m-k$ wierszy i $n-k$ kolumn.

Def. **Rzędem** macierzy nazywamy największy stopień jej niezerowego minora.
Rząd macierzy A oznaczamy symbolem $r(A)$ lub $\mathrm{rank}(A)$.

Tw. Liczba $k \in \mathbb{N}$ jest **rzędem** niezerowej macierzy A wtedy i tylko wtedy, gdy
1° istnieje różny od zera minor stopnia k macierzy A,
2° nie istnieje różny od zera minor macierzy A stopnia większego niż k.

Uwaga. Znalezienie zerowego minora stopnia k nie oznacza, że $r(A) < k$.

Stw. Dla dowolnej macierzy A zachodzi równość $r(A) = r(A^T)$.

Wniosek. Rząd macierzy nie może przekraczać ani liczby jej wierszy, ani liczby jej kolumn.

Rząd macierzy nie zmienia się w wyniku wykonania następujących operacji:
- dodania do wiersza (lub kolumny) wielokrotności innego wiersza (odpowiednio kolumny),
- pomnożenia wiersza (lub kolumny) przez stałą różną od zera,
- zamiany wierszy (lub kolumn) miejscami,
- skreślenia zerowego wiersza (lub zerowej kolumny),
- skreślenia wiersza będącego kombinacja liniową innych wierszy
  (lub kolumny będącej kombinacją liniową innych kolumn).

Przykład 16. Wyznaczymy rząd macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & \underline{2} & \underline{3} & 4 & 5 \\ 1 & \underline{2} & \underline{1} & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 11 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 10 \end{bmatrix}$.

Zauważamy, że $r(A) \leqslant 4$, bo jest ograniczony przez liczbę kolumn i wierszy macierzy.

Możemy wskazać niezerowy minor stopnia 2, np. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$, więc $r(A) \geqslant 2$.

Gdyby udało nam się wskazać niezerowy minor stopnia 4, wiedzielibyśmy, że $r(A) = 4$, ale w tym celu trzeba obliczać wyznaczniki stopnia 4 (szkoda czasu).

Wykonamy na macierzy A pewne operacje, które nie zmienią jej rzędu.

1) Wykonujemy operacje na wierszach takie, by uzyskać dużo zer: $w_2 - w_1$; $w_3 - 3w_1$; $w_4 - w_1$

$$r(A) = r\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 11 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 10 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

2) Skreślamy wiersz w_3, bo się powtarza.

Po skreśleniu wiersza wiemy, że $r(A) \leqslant 3$, bo zostały tylko 3 wiersze.

3) Zamieniamy wiersze $w_2 \leftrightarrow w_3$, żeby łatwiej wskazać niezerowy minor stopnia 3.

$$r(A) = r\begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & -1 & -5 \end{bmatrix} = 3, \ \text{bo minor} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Uwaga: Ostatnia postać macierzy, to tzw. **postać schodkowa**, w której pierwsze niezerowe wyrazy w wierszach pojawiają się w kolumnach w rosnącymi numerami. W pierwszym wierszu element z kolumny I, w drugim wierszu element z kolumny II, a w trzecim wierszu element z kolumny III.

Gdy mamy macierz w postaci schodkowej, gdzie nie można już skreślić żadnego wiersza, to rząd takiej macierzy jest równy liczbie jej wierszy.

Przykład 17. Wyznaczyć rząd macierzy $A = \begin{bmatrix} t-1 & -t & 1 \\ -1 & t & 1 \\ -t-1 & 0 & t+1 \end{bmatrix}$ w zależności od $t \in \mathbb{R}$.

Do kolumny I dodamy kolumnę III (nie zmieni to rzędu macierzy)

$$r(A) = r\begin{bmatrix} t-1 & -t & 1 \\ -1 & t & 1 \\ -t-1 & 0 & t+1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} t & -t & 1 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t+1 \end{bmatrix}$$

Otrzymaliśmy macierz trójkątną o wyznaczniku $t^2(t+1)$. Ten wyznacznik jest niezerowy, gdy $t \neq 0$ i $t \neq -1$. Dla takich t będzie $r(A) = 3$.

Dla $t = 0$ dostajemy $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Możemy skreślić dwa wiersze, bo się powtarzają, zostanie jeden wiersz, więc $r(A) = 1$.

Dla $t = -1$ dostajemy $A = \begin{bmatrix} -2 & \underline{1} & \underline{1} \\ -1 & \underline{-1} & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Możemy skreślić wiersz samych zer. Zostaną dwa wiersze i wskażemy niezerowy minor stopnia 2 np. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, więc $r(A) = 2$.