

## Macierze

Niech  $\mathbb{K}$  będzie ustalonym ciałem,  $m, n \in \mathbb{N}$ .

**Def. Macierzą** o wymiarach  $m$  na  $n$  nad ciałem  $\mathbb{K}$  nazywamy funkcję

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad (i, j) \mapsto a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Wartości funkcji  $A$  nazywamy **wyrazami** macierzy.

Wartość, którą funkcja  $A$  przyporządkowuje elementowi  $(i, j)$ , oznaczamy  $a_{ij}$ .

Macierz o wymiarach  $m$  na  $n$  oznacza się symbolem  $[a_{ij}]_{m \times n}$

(ewentualnie przez  $[a_{ij}]$  jeśli to nie prowadzi do nieporozumień).

Macierz  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  przedstawia się w postaci tablicy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierz  $[a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}]$  nazywa się  **$i$ -tym wierszem** macierzy  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ,

zaś  **$j$ -tą kolumną** macierzy  $A$  nazywamy macierz  $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

Symbolem  $M_{m \times n}(\mathbb{K})$  oznaczamy zbiór macierzy o wymiarach  $m \times n$  i elementach z ciała  $\mathbb{K}$ .

Def. Macierz, której wszystkie wyrazy są równe 0 nazywamy **macierzą zerową** i oznaczamy symbolem  $\mathbf{0}$  (lub  $\mathbf{0}_{m \times n}$ ).

Def. Macierz  $A$  o wymiarach  $n \times n$  nazywamy **macierzą kwadratową** (stopnia  $n$ ).

Ciąg  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  nazywamy wtedy **główną przekątną** macierzy  $A$  (lub **diagonałą**).

### Przykład 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 4 & 2 & 14 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \quad B = \begin{bmatrix} 1+j & 3 & \pi \\ -3 & 4 & 2j \\ 5 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C}) \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 1}(\mathbb{C})$$

$$\begin{bmatrix} 8j \end{bmatrix} \in M_{1 \times 1}(\mathbb{C}) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2j \end{bmatrix} \in M_{1 \times 2}(\mathbb{C}) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times 2} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$$

**Przykład 2.**

- Macierz **trójkątna górna** to taka macierz kwadratowa, która wszystkie wyrazy poniżej diagonalu ma równe 0

Na przykład 
$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Macierz **trójkątna dolna** to taka macierz kwadratowa, która wszystkie wyrazy powyżej diagonalu ma równe 0

Na przykład 
$$\begin{bmatrix} j & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & -j & 0 \end{bmatrix}$$

- Macierz **diagonalna** to taka macierz kwadratowa, ozn.  $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ , która ma wszystkie wyrazy poza diagonalą równe 0.

Na przykład 
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \text{diag}\left(\begin{bmatrix} 2j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 0\right)$$

- Macierz **jednostkowa**, ozn.  $I$  lub  $I_n$  ma 1 na diagonalu, a poza nią same zera.

Na przykład 
$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W zbiorze  $M_{m \times n}(\mathbb{K})$  definiuje się działania

**dodawanie macierzy:**  $[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$

oraz **mnożenie macierzy przez skalar**  $\alpha \in \mathbb{K}$ :  $\alpha \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m \times n}$ .

**Przykład 3.**

Dodawanie: 
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mnożenie przez skalar: 
$$-2j \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3j & -4 \\ j & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4j & 6 & 8j \\ 2 & 0 & -6j \end{bmatrix}$$

**Uwaga:** Można dodawać tylko macierze takiego samego wymiaru.

Suma macierzy trójkątnych górnych (dolnych) będzie macierzą trójkątną górną (dolną).

**Tw.** Dla dowolnych macierzy  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  i dowolnych skalarów  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  zachodzą następujące równości:

1.  $A + B = B + A$
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$
3.  $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
4.  $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
5.  $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$

**Uwaga:** Dla działania dodawania macierzy elementem neutralnym jest macierz zerowa.

Dla każdej macierzy  $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  istnieje **macierz przeciwna**  $-A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ , czyli odwrotna względem dodawania  $-A = -1 \cdot A = [-a_{ij}]$ .

Możemy zdefiniować **odejmowanie macierzy**  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  następująco:

$$A - B = A + (-B), \text{ czyli } [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}].$$

Struktura algebraiczna  $(M_{m \times n}(\mathbb{K}), +)$  jest grupą przemienną.

Struktura algebraiczna  $((M_{m \times n}(\mathbb{K}), +), \mathbb{K}, \cdot)$  jest przestrzenią liniową wymiaru  $m \cdot n$  nad ciałem  $\mathbb{K}$ .

**Def. Iloczynem** macierzy  $[a_{ik}]_{m \times p} \cdot [b_{kj}]_{p \times n}$  nazywamy macierz  $[c_{ij}]_{m \times n}$ , taką że

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \text{dla } i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{a_{i1}} & \underline{a_{i2}} & \dots & \underline{a_{ip}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \underline{b_{1j}} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & \underline{b_{2j}} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & \underline{b_{pj}} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & \underline{c_{1j}} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \underline{c_{ij}} & \dots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & \underline{c_{mj}} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} = A \cdot B$$

**Uwaga:** Mnożenie macierzy  $A \cdot B$  jest wykonalne, jeśli macierz  $A$  ma tyle kolumn, ile wierszy ma macierz  $B$ .

**Przykład 4.** Wykonamy mnożenie macierzy  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ .

Mnożenie

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Mnożenie

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 & 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & -9 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

### Własności mnożenia macierzy

1.  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$  dla  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$ ,  $C \in M_{p \times r}(\mathbb{K})$
2.  $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$  dla  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$
3.  $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$  dla  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$
4.  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  dla  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B, C \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$
5.  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$  dla  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $C \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$

**Uwaga:** Mnożenie macierzy nie jest przemienne (przykład 4).

**Przykład 5.** Istnieją macierze niezerowe, których iloczyn jest macierzą zerową np.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Uwaga:** Dla mnożenia macierzy przez skalar  $\lambda$  zachodzi równość

$$\lambda \cdot [a_{ij}]_{n \times n} = \lambda \cdot I_n \cdot [a_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot [a_{ij}]_{n \times n}$$

## Potęgowanie macierzy kwadratowych

Jeśli  $A$  jest macierzą kwadratową, to istnieje iloczyn  $n$  czynników  $A \cdot A \cdot \dots \cdot A \stackrel{\text{ozn.}}{=} A^n$ .

**Def. Macierz transponowaną** macierzy  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  nazywamy macierz  $A^T = [b_{ij}]_{n \times m}$ , gdzie  $b_{ij} = a_{ji}$  dla dowolnych  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Uwaga. Macierz transponowana  $A^T$  jest to macierz, której kolumnami są wiersze macierzy  $A$ , natomiast wierszami – kolumny macierzy  $A$ .

### Przykład 6.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

## Własności transpozycji macierzy

1.  $(A + B)^T = A^T + B^T$  dla  $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$
2.  $(A^T)^T = A$  dla  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$
3.  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$  dla  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$
4.  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$  dla  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$

## Macierz odwrotna do danej macierzy kwadratowej

Def. **Macierz odwrotną** do macierzy  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  nazywamy taką macierz  $B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ , że

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n. \quad (\text{ozn. } B = A^{-1})$$

Jeśli istnieje macierz odwrotna do macierzy  $A$ , to jest ona wyznaczona jednoznacznie, zaś  $A$  nazywamy macierzą **odwracalną**.

**Uwaga:** Nie każda macierz kwadratowa jest odwracalna.

## Własności

1. Jeśli  $A$  jest macierzą odwracalną, to  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
2. Jeśli  $A$  jest macierzą odwracalną, to  $A^T$  jest macierzą odwracalną i  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .
3. Jeśli  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$  są macierzami odwracalnymi, to  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ .

**Wyznaczanie macierzy odwrotnej metodą eliminacji:**

Zapisujemy macierz  $[A|I]$

(z prawej strony macierzy  $A$  dopisujemy macierz jednostkową  $I$ , takiego wymiaru jak  $A$ ).

Następnie wykonujemy serię operacji na wierszach macierzy  $[A|I]$ , tak aby uzyskać macierz postaci  $[I|B]$  (macierz jednostkowa ma powstać w miejscu macierzy  $A$ ).

Jeśli uzyskamy taką postać macierzy, to wtedy macierz  $B = A^{-1}$ .

Schemat postępowania:  $[A|I] \xrightarrow{\text{operacje na wierszach}} [I|A^{-1}]$

Możemy wykonywać następujące operacje na wierszach przekształcanej macierzy  $[A|I]$ :

- mnożenie wiersza przez skalar różny od zera ( $\alpha \cdot w_i$ ),
- dodawanie do wiersza wielokrotności innego wiersza ( $w_i + \alpha \cdot w_j$ ),
- zamiana wierszy miejscami ( $w_i \longleftrightarrow w_j$ ).

**Przykład 7.** Wyznamy macierz odwrotną do macierzy  $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ .

$$\begin{aligned}
 [A|I_2] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1:3} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2-2w_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2 \cdot 3} \\
 &\longrightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1 - \frac{4}{3}w_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 3 \end{array} \right] = [I_2|A^{-1}]
 \end{aligned}$$

Inna sekwencja operacji na wierszach:

$$\begin{aligned}
 [A|I_2] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1-w_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2-2w_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{w_1-w_2} \\
 &\longrightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right] = [I_2|A^{-1}]
 \end{aligned}$$

**Przykład 8.** Spróbujemy wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ .

$$[A|I_2] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{w_2+2w_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

W lewej macierzy pojawił się wiersz samych zer. W takiej sytuacji nie będzie możliwe uzyskanie macierzy postaci  $[I_2|A^{-1}]$ . Oznacza to, że macierz  $A$  jest nieodwracalna.