Zbiory uporządkowane

Relacje częściowego porządku

Częściowy porządek w zbiorze X to relacja, która pozwala porównywać ze sobą pewne elementy tego zbioru. Porównanie dwóch różnych elementów oznacza stwierdzenie, że jeden z nich jest mniejszy (wcześniejszy), a drugi jest większy (późniejszy).

Def. 1. *Mówimy, że relacja r w zbiorze X jest relacją **częściowego porządku**, jeśli jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia.*

Przez zbiór częściowo uporządkowany rozumiemy zbiór X wraz z relacją porządkującą, czyli parę (X, r).

Warunek zwrotności w definicji 1. oznacza, że częściowymi porządkami są relacje nierówności słabych, na przykład $\leqslant$ dla liczb, $\subseteq$ dla zbiorów. Szczególnym przykładem relacji porządku częściowego jest relacja równości.

Stosujemy następujące oznaczenia relacji porządku: $\leqslant, \preceq, \ll, \preccurlyeq$.

Jeśli X jest zbiorem skończonym z relacją częściowego porządku $\leqslant$, to ten porządek można przedstawić w postaci *diagramu Hassego* czyli grafu skierowanego, w którym wierzchołkami są elementy zbioru X, a strzałki (krawędzie) idą w górę od a do b, jeśli $a \leqslant b$ i $a \neq b$ oraz nie istnieje c takie, że $a < c < b$.

Porządek liniowy

Def. 2. *Jeżeli w $(X, \leqslant)$ każde dwa elementy są porównywalne, to relację $\leqslant$ nazywamy relacją **liniowego porządku** w zbiorze X, a dokładnie $(X, \leqslant)$ jest **zbiorem liniowo uporządkowanym**, jeśli $\leqslant$ jest relacją spójną i jest częściowym porządkiem w X.*

Jeśli $Y \subseteq X$, to $r|Y$ oznacza relację ograniczoną (obciętą) do zbioru Y, tzn. relację zdefiniowaną następująco: $r|Y = r \cap Y^2$.

Fakt: Jeśli r jest częściowym porządkiem w X, to $r|Y$ jest częściowym porządkiem w zbiorze Y.

Def. 3. *Niech $(X, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Jeśli podzbiór $L \subseteq X$ jest liniowo uporządkowany przez relację $\leqslant |L$, to L nazywamy **łańcuchem** w zbiorze X.*

Uwaga: $\emptyset$ jest częściowo uporządkowany przez relację pustą i jest łańcuchem (zerowej długości) w dowolnym zbiorze $(X, \leqslant)$.

Def. 4. *Podzbiór $Z \subseteq X$ jest **antyłańcuchem** w zbiorze uporządkowanym $(X, \leqslant)$, jeśli $\forall x, y \in Z \ \neg (x < y \vee y < x)$ (żadne dwa różne elementy zbioru Z nie są porównywalne).*

Izomorfizm porządkowy

Def. 5. *Zbiory częściowo uporządkowane $(X, \leqslant_X)$ i $(Y, \leqslant_Y)$ są porządkowo izomorficzne, jeśli istnieje bijekcja $f : X \to Y$, taka że $x_1 \leqslant_X x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant_Y f(x_2)$.*

Elementy wyróżnione

Def. 6. *Niech* $(X, \leqslant)$ *będzie zbiorem częściowo uporządkowanym i niech* $x_0 \in X$. *Element* x_0 *nazywamy:*

- ***minimalnym***, *jeśli* $\neg\exists x \in X \;\; x < x_0$;
- ***maksymalnym***, *jeśli* $\neg\exists x \in X \;\; x_0 < x$;
- ***najmniejszym***, *jeśli* $\forall x \in X \;\; x_0 \leqslant x$;
- ***największym***, *jeśli* $\forall x \in X \;\; x \leqslant x_0$.

Uwaga 1. W zbiorze $(X, \leqslant)$ istnieje co najwyżej jeden element największy (najmniejszy).

Uwaga 2. Jeśli istnieje element największy (najmniejszy), to jest on jedynym elementem maksymalnym (minimalnym).

Uwaga 3. Nie każdy element maksymalny (minimalny) jest największy (najmniejszy).

Uwaga 4. Element maksymalny może być jednocześnie elementem minimalnym.

Fakt: Jeśli $(X, \leqslant)$ jest niepustym, skończonym zbiorem uporządkowanym, to w X istnieje element maksymalny oraz minimalny. Ponadto, jeśli $x_0 \in X$ jest jedynym elementem minimalnym (maksymalnym), to jest on elementem najmniejszym (największym).

Def. 7. *Niech* $(X, \leqslant)$ *będzie zbiorem częściowo uporządkowanym i niech* $A \subseteq X$ *oraz* $a \in X$. *Mówimy, że:*

- *a jest* ***ograniczeniem górnym*** *zbioru A, jeśli* $\forall x \in A \;\; x \leqslant a$;
- *a jest* ***ograniczeniem dolnym*** *zbioru A, jeśli* $\forall x \in A \;\; a \leqslant x$;
- *a jest* ***kresem górnym*** *zbioru A (****supremum*** *zbioru A,* $a = \sup A$*), jeśli a jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A, czyli*

$$a = \sup A \Leftrightarrow (\forall x \in A \; x \leqslant a) \wedge \; (\forall b \in X \, [\forall x \in A \;\; x \leqslant b \Rightarrow a \leqslant b]);$$

- *a jest* ***kresem dolnym*** *zbioru A (****infimum*** *zbioru A,* $a = \inf A$*), jeśli a jest największym ograniczeniem dolnym zbioru A, czyli*

$$a = \inf A \Leftrightarrow (\forall x \in A \; a \leqslant x) \wedge \; (\forall b \in X \, [\forall x \in A \;\; b \leqslant x \Rightarrow b \leqslant a]).$$

Częściowy porządek w produkcie zbiorów uporządkowanych

Niech $(X, \leqslant_X)$, $(Y, \leqslant_Y)$ będą niepustymi zbiorami uporządkowanymi. Częściowy porządek w zbiorze $X \times Y$ można zdefiniować wykorzystując relacje $\leqslant_X$ i $\leqslant_Y$.

- **porządek leksykograficzny** $(X \times Y, \leqslant_L)$:
  $(x_1, y_1) \leqslant_L (x_2, y_2) \Leftrightarrow [(x_1 <_X x_2) \;\vee\; (x_1 = x_2 \;\wedge\; y_1 \leqslant_Y y_2)]$;
- **porządek produktowy** $(X \times Y, \leqslant_P)$:
  $(x_1, y_1) \leqslant_P (x_2, y_2) \Leftrightarrow [(x_1 \leqslant_X x_2) \;\wedge\; (y_1 \leqslant_Y y_2)]$;

Kraty

Def. 8. *Zbiór częściowo uporządkowany* $(X, \leqslant)$ *nazywamy* ***kratą****, jeśli dla każdych dwóch elementów* $x, y \in X$ *istnieje kres dolny –* $\inf\{x, y\}$ *(oznaczany* $x \wedge y$*) oraz kres górny –* $\sup\{x, y\}$ *(oznaczany* $x \vee y$*).*

Uwaga 1: Podzbiór kraty nie musi być kratą.

Uwaga 2: Jeśli $(X, \leqslant)$ jest kratą, to $\forall x, y \in X \ \ (x \leqslant y) \Leftrightarrow (x \wedge y = x) \Leftrightarrow (x \vee y = y)$.

Fakt: W każdej kracie, dla dowolnych $x, y, z \in X$ zachodzą równości:

1. $x \wedge x = x, \quad x \vee x = x;$
2. $x \wedge y = y \wedge x, \quad x \vee y = y \vee x;$
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z, \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z;$
4. $x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x.$

Def. 9. *Kratę* $(X, \leqslant)$ *nazywamy* ***rozdzielną*** *(dystrybutywną), jeśli*

$\forall x, y, z \in X \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

(równoważnie $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$*).*

Porządki gęste, ciągłe i dobre

Def. 10. *Niech* $(X, \leqslant)$ *będzie zbiorem liniowo uporządkowanym. Mówimy,że liniowy porządek* $\leqslant$ *jest:*

- ***Gęsty****, jeśli* X *ma co najmniej 2 elementy oraz dla każdej pary różnych elementów* $x, y \in X$*, jeśli* $x < y$*, to istnieje taki element* $z \in X$*, że* $x < z < y$*.*
- ***Ciągły****, jeśli jest gęsty oraz każdy niepusty zbiór* $A \subseteq X$*, ograniczony z góry, ma kres górny (w* X*), a każdy niepusty zbiór* $B \subseteq X$*, ograniczony z dołu, ma kres dolny.*
- ***Dobry****, jeśli w każdym niepustym zbiorze* $A \subseteq X$ *istnieje element najmniejszy. Mówimy wtedy, że relacja* $\leqslant$ *dobrze porządkuje zbiór* X*.*

Lemat Kuratowskiego – Zorna (1922)

Niech $(X, \leqslant)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Jeżeli dla każdego łańcucha w X istnieje ograniczenie górne, to w X istnieje element maksymalny (dokładniej: dla każdego $x_0 \in X$ istnieje element maksymalny x_1 taki, że $x_0 \leqslant x_1$.

Powyższe twierdzenie (lub jego równoważne sformułowania m. in. pewnik wyboru) jest często wykorzystywane w wielu działach matematyki (również w poniższym twierdzeniu).

Twierdzenie o dobrym uporządkowaniu: *Dla każdego zbioru* X *istnieje relacja* $\leqslant$*, która go dobrze porządkuje.*