

LICZBY ZESPOLONE

Def. **Liczbą zespoloną** nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych (x, y) , $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \text{ oraz } y_1 = y_2).$$

Równość liczb zespolonych to równość odpowiednich współrzędnych.

Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez \mathbb{C} .

W zbiorze tym definiujemy dwa działania: dodawanie i mnożenie.

$$\text{Niech } z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2).$$

$$\text{Dodawanie liczb zespolonych: } z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

$$\text{Mnożenie liczb zespolonych: } z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Przykład 1 Wykonamy działania na liczbach $z_1 = (1, 2)$, $z_2 = (3, 5)$

$$z_1 + z_2 = (1, 2) + (3, 5) = (4, 7)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1, 2) \cdot (3, 5) = (1 \cdot 3 - 2 \cdot 5, 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3) = (-7, 11)$$

Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych to działania łączne i przemienne, mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

Liczba $(0, 0)$ nazywana **zerem** jest elementem neutralnym dodawania,

$$\text{gdyż } (0, 0) + (x, y) = (x, y) + (0, 0) = (x, y)$$

a liczba $(1, 0)$ nazywana **jedynką** jest elementem neutralnym mnożenia,

$$\text{gdyż } (1, 0) \cdot (x, y) = (x, y) \cdot (1, 0) = (x, y).$$

Dla każdej liczby zespolonej $z = (x, y)$ istnieje liczba zespolona **przeciwna** ozn. $-z = (-x, -y)$.

Odejmowanie liczb zespolonych definiujemy następująco:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

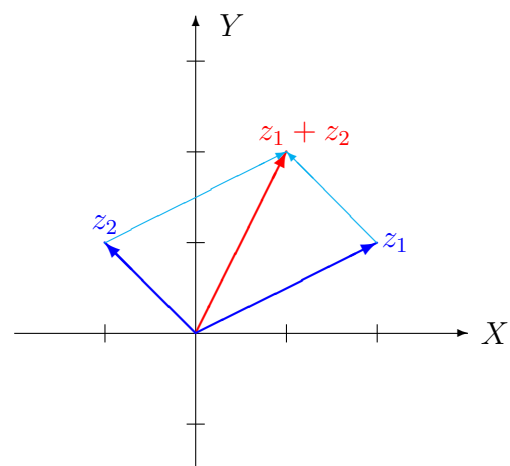
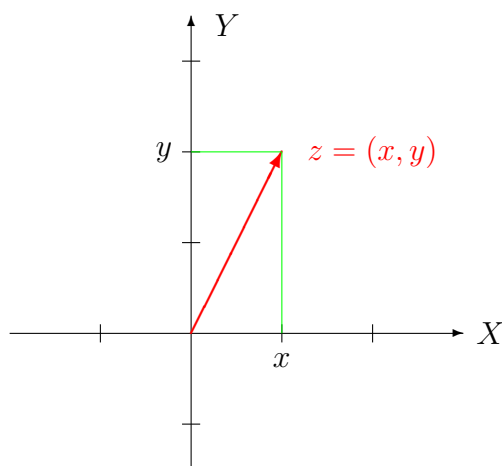
Dla każdej liczby zespolonej $z \neq (0, 0)$ istnieje liczba zespolona do niej **odwrotna** ozn. z^{-1} spełniająca warunek $z \cdot z^{-1} = (1, 0)$. (wyznaczenie odwrotności dalej)

Uwaga: Wyszczególnione wyżej własności działań dodawania i mnożenia w zbiorze liczb zespolonych pozwalają stwierdzić, że algebra $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem (podobnie jak $(\mathbb{R}, +, \cdot)$).

PŁASZCZYZNA ZESPOLONA

Płaszczyzna zespolona to model ciała liczb zespolonych \mathbb{C} , w którym elementy $z = (x, y)$ traktujemy jak punkty płaszczyzny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ z ustalonym układem współrzędnych kartezjańskich. Zamiennie elementy (x, y) możemy utożsamiać z wektorami wodzącymi, czyli wektorami zaczepionymi w punkcie $(0, 0)$ o końcu w punkcie o współrzędnych (x, y) .

Dodawanie liczb zespolonych interpretujemy jako dodawanie odpowiadających im wektorów na płaszczyźnie zespolonej.



LICZBY RZECZYWISTE

Rozważmy zbiór $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$.

Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0) \quad \text{oraz} \quad (x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y, 0).$$

Możemy traktować liczby zespolone postaci $(x, 0)$ jak liczby rzeczywiste i dalej będziemy je utożsamiać z liczbami rzeczywistymi.

Zbiór $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{C}$ utożsamiamy ze zbiorem liczb rzeczywistych ($\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$).

Na płaszczyźnie zespolonej liczby rzeczywiste reprezentowane są przez punkty należące do osi odciętych (OX).

Zamiast $(x, 0)$ piszemy x .

Mamy również $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}$ oraz $1 = (1, 0) \in \mathbb{R}$,

czyli elementy neutralne działań w zbiorze \mathbb{C} są liczbami rzeczywistymi.

LICZBY UROJONE

Def. Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy **jednostką urojoną** i oznaczamy j .

Uwaga: $j^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$, $j \notin \mathbb{R}$

j jest pierwiastkiem kwadratowym z liczby $-1 \in \mathbb{R}$.

Uwaga: Jednostka urojona została po raz pierwszy wykorzystana w XV wieku przez matematyków Cardano i Tartaglię w celu wyprowadzenia wzorów na rozwiązania rzeczywiste równań wielomianowych trzeciego stopnia.

Uwaga: Generalnie matematycy oznaczają jednostkę urojoną literą i . Oznaczenie j stosowane jest częściej przez inżynierów, a liczby zespolone mają istotne zastosowanie w opisie zjawisk fizycznych, szczególnie tych związanych z elektrycznością.

Przykład 2 Wykonamy obliczenia

$$a \cdot j = (a, 0) \cdot (0, 1) = (a \cdot 0 - 0 \cdot 1, a \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, a)$$

$$(a \cdot j) \cdot (b \cdot j) = (0, a) \cdot (0, b) = (-ab, 0) = -ab \in \mathbb{R}$$

Liczbami czysto urojonymi nazywamy wszystkie zespolone liczby postaci yj , gdzie $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Na płaszczyźnie zespolonej liczby czysto urojone znajdują się na osi rzędnych (OY).

POSTAĆ KANONICZNA

Wykorzystując własności działań na liczbach zespolonych, otrzymujemy

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + j \cdot y.$$

Postać algebraiczna (kanoniczna) liczby zespolonej (x, y) to zapis

$$z = x + jy \quad \text{lub} \quad z = x + yj.$$

Działania na liczbach zespolonych w postaci kanonicznej

Działania w postaci kanonicznej wykonuje się jak na rzeczywistych wyrażeniach algebraicznych, uwzględniając fakt, że $j^2 = -1$.

Dla $z_1 = x_1 + jy_1$, $z_2 = x_2 + jy_2$ mamy

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
2. $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
3. $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + j(x_1y_2 + x_2y_1)$
4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ dla $z_2 \neq 0$.

Uwaga: Wykorzystując własność 4. uzyskamy wzór na odwrotność liczby $z = x + jy$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + jy} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + j\frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Przykład 3 Wykonamy obliczenia na liczbach $z_1 = 1 + 2j$, $z_2 = 3 - 4j$

$$z_1 + z_2 = 1 + 2j + 3 - 4j = 4 - 2j$$

$$z_1 - z_2 = 1 + 2j - (3 - 4j) = -2 + 6j$$

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + 2j) \cdot (3 - 4j) = 3 - 4j + 6j - 8j^2 = 3 + 2j + 8 = 11 + 2j$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2j}{3 - 4j} = \frac{(1 + 2j)(3 + 4j)}{(3 - 4j)(3 + 4j)} = \frac{3 + 6j + 4j + 8j^2}{9 - 16j^2} = \frac{3 + 10j - 8}{25} = \frac{-5 + 10j}{25} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}j$$

$$z_1^{-1} = \frac{1}{1 + 2j} = \frac{1 - 2j}{(1 + 2j)(1 - 2j)} = \frac{1 - 2j}{1 + 4} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}j$$

Wyliczymy jeszcze potęgi liczby j .

$$j^0 = 1, \quad j^1 = j, \quad j^2 = -1, \quad j^3 = j^2 \cdot j = -j, \quad j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1, \quad j^5 = j^4 \cdot j = j, \quad itd.$$

Część rzeczywista liczby zespolonej $z = x + jy$ oznaczana jest $\operatorname{Re} z = x$.

Część urojona liczby zespolonej $z = x + jy$ oznaczana jest $\operatorname{Im} z = y$.

Każda liczba zespolona może być zapisana w postaci

$$z = \operatorname{Re} z + j\operatorname{Im} z$$

Uwaga: $\operatorname{Re} z$ oraz $\operatorname{Im} z$ są liczbami rzeczywistymi (tak, jak x oraz y).

Przykład 4 Dla liczby $z_1 = 3 - 7j$ mamy $\operatorname{Re} z = 3$, $\operatorname{Im} z = -7$,
dla liczby $z_2 = 3j$ mamy $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 3$.

Uwaga: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \wedge \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$

Uwaga: $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$ oraz $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2$
dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Uwaga: Osie układu współrzędnych dla płaszczyzny zespolonej będziemy oznaczać

$\operatorname{Re} z$ zamiast x , $\operatorname{Im} z$ zamiast y i nazywać odpowiednio **osią rzeczywistą** i **osią urojoną**.

Def. **Sprzężeniem** liczby zespolonej $z = x + jy$, $x, y \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę

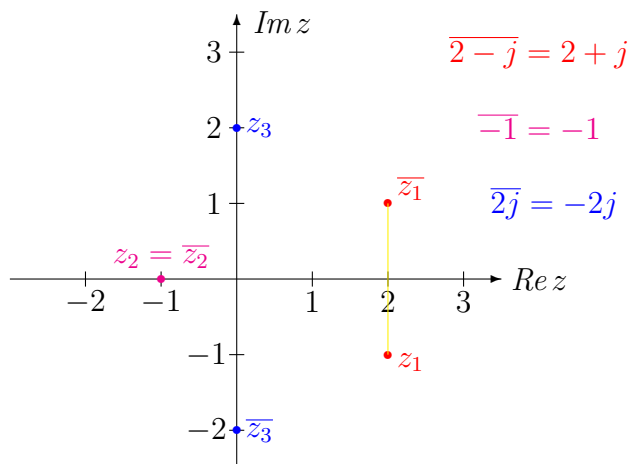
$$\bar{z} = x - jy.$$

Mówimy, że liczba \bar{z} jest sprzężona do liczby z .

Interpretacja geometryczna sprzężenia:

Sprzężeniem liczby zespolonej jako punktu na płaszczyźnie zespolonej jest odbicie tego punktu względem osi rzeczywistej.

Przykład 5 Wyznaczymy sprzężenia liczb $z_1 = 2 - j$, $z_2 = -1$, $z_3 = 2j$.



Przykład 6 Rozwiązać równanie $z + 2\bar{z} = 6 + 5j$.

Niech $z = x + jy$. Wtedy dostaniemy

$x + jy + 2(x - jy) = 6 + 5j$, stąd

$$3x - jy = 6 + 5j$$

Porównujemy części rzeczywiste i urojone

$$\operatorname{Re} : 3x = 6 \qquad \operatorname{Im} : -y = 5$$

Mamy więc $x = 2, y = -5$, czyli $z = 2 - 5j$.

Własności sprzężenia Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, wtedy

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}; \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

Def. **Modułem** liczby zespolonej $z = x + jy$, $x, y \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Przykład 7 *Obliczmy moduły*

$$|3 - j| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$|-\pi| = \pi$$

$$|-7j| = \sqrt{0^2 + (-7)^2} = 7.$$

Własności modułu Niech $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$, wtedy

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0; \quad |z| = |\overline{z}|; \quad |z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{gdy } z_2 \neq 0.$$

Uwaga: Moduł liczby zespolonej jest liczbą rzeczywistą nieujemną.

Uwaga: Dla liczb zespolonych nierówności nie mają sensu. Zbiór \mathbb{C} nie jest uporządkowany tak jak zbiór \mathbb{R} .

Interpretacja geometryczna

Liczbę $z = x + jy$, możemy przedstawić na płaszczyźnie jako punkt o współrzędnych (x, y) .

Moduł liczby z jest odległością tego punktu od punktu $(0, 0)$, czyli liczby zespolonej 0.

Wielkość $|z_1 - z_2|$ jest odległością między liczbami z_1 i z_2 .

Przykład 8 *Wyznaczyc zbiory liczb zespolonych $z = x + jy$ spełniających podane warunki.*

1. $|z| \leq 2$

Warunek podany oznacza, że na płaszczyźnie punkty z są w odległości od 0 nie przekraczającej 2, czyli znajdują się w kole domkniętym o środku w $z_0 = 0$ i promieniu $r = 2$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4;$$

2. $|z + 2j| = 2$

Zadany warunek jest równoważny $|z - (-2j)| = 2$, czyli punkty z mają odległość równą 2 od punktu $z_0 = -2j$. Oznacza to, że należą do okręgu o środku w $z_0 = -2j$ i promieniu $r = 2$

$$|z + 2j| = |x + j(y + 2)| = \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 2^2;$$

$$3. |z - j| = |z + 3j|$$

Liczba $|z - j|$ to odległość punktu z od $z_1 = j$, a liczba $|z + 3j|$ to odległość punktu z od $z_2 = -3j$.

Podany warunek oznacza, że szukamy punktów równoodległych od z_1 i z_2 . Punkty te leżą na symetrycznej odcinka łączącego punkty z_1 i z_2 . Obliczenia:

$$|z - j| = |x + jy - j| = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}, \quad |z + 3j| = |x + jy + 3j| = \sqrt{x^2 + (y + 3)^2}$$

Równość $|z - j| = |z + 3j|$ zachodzi, gdy $x^2 + (y - 1)^2 = x^2 + (y + 3)^2$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 6y + 9$$

$$8y = -8, \quad \text{czyli } y = -1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Zbiór rozwiązań to prosta określona równaniem $y = -1$ lub równoważnie $\text{Im } z = -1$.

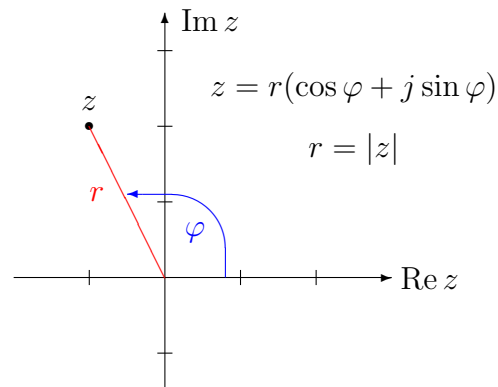
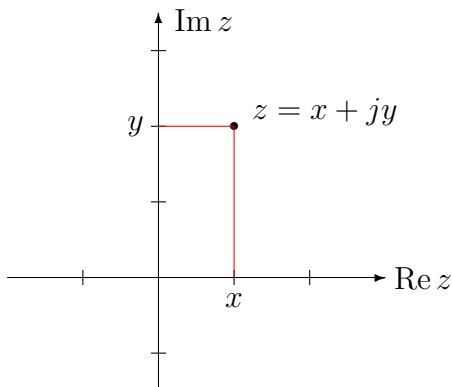
ARGUMENT LICZBY ZESPOLONEJ

Miarę φ kąta skierowanego utworzonego przez dodatnią półoś rzeczywistej i odcinek łączący $z \neq 0$ z początkiem układu współrzędnych nazywamy **argumentem** liczby z .

Argument jest określony tylko dla liczb $z \neq 0$.

Zbiór wszystkich argumentów liczby z oznaczamy $\text{Arg } z$.

Argumenty danej liczby zespolonej różnią się o całkowitą wielokrotność liczby 2π .



Argument liczby z nazywamy **argumentem głównym**, jeśli należy do przedziału $(-\pi, \pi]$.

Argument główny oznaczamy $\arg z$.

Uwaga: Argument główny liczby $z \neq 0$ to taka liczba $\varphi \in (-\pi, \pi]$, dla której

$$\cos \varphi = \frac{\text{Re } z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{\text{Im } z}{|z|}.$$

Jeśli $\varphi \in \text{Arg } z$, to zachodzi równość $\frac{\text{Im } z}{\text{Re } z} = \text{tg } \varphi$.

Z powyższej równości możemy wyznaczyć wartości kąta φ z dokładnością do $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Przykład 9 Obliczyć argumenty podanych liczb.

1. $z_1 = 5$

Liczba z_1 leży na dodatniej półosi osi rzeczywistej, więc np. $\varphi = 0$,

$$\text{Argumenty liczby } z_1 \text{ spełniają warunki } \cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z_1}{|z_1|} = \frac{5}{5} = 1 \text{ i } \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z_1}{|z_1|} = \frac{0}{5} = 0.$$

$$\text{Stąd } \arg(5) = 0, \quad \operatorname{Arg}(5) = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Uwaga: Wszystkie liczby zespolone leżące na dodatniej półosi osi rzeczywistej mają taki sam argument główny $\arg z = 0$.

2. $z_2 = j\pi$

Liczba z_2 leży na dodatniej półosi osi urojonej, która tworzy z dodatnią półosią osi rzeczywistej kąt $\frac{\pi}{2}$, więc np. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$\operatorname{Re} z_2 = 0, \quad \operatorname{Im} z_2 = \pi, \quad |z_2| = \pi$$

$$\text{Znajdujemy liczby } \varphi \text{ spełniające warunki } \cos \varphi = \frac{0}{\pi} = 0 \text{ i } \sin \varphi = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$\text{Dostajemy } \arg(j\pi) = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Arg}(j\pi) = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Uwaga: Wszystkie liczby zespolone leżące na dodatniej półosi osi urojonej mają taki sam argument główny $\arg z = \frac{\pi}{2}$.

3. $z_3 = 1 + j$

Liczba z_3 leży na półprostej określonej warunkami $y = x$, $x > 0$, która tworzy z dodatnią półosią osi rzeczywistej kąt $\frac{\pi}{4}$, więc np. $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$$\operatorname{Re} z_3 = 1, \quad \operatorname{Im} z_3 = 1, \quad |z_3| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Znajdujemy liczby } \varphi \text{ spełniające warunki } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ i } \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Dostajemy } \arg(1 + j) = \frac{\pi}{4}, \quad \operatorname{Arg}(1 + j) = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Uwaga: Wszystkie liczby zespolone postaci $z = r(1 + j)$, gdzie $r > 0$ mają taki sam argument główny $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

Uwaga: Czasem (w niektórych podręcznikach) przyjmuje się, że argument główny jest liczbą z przedziału $[0, 2\pi)$.

Uwaga: Argument liczby zespolonej 0 nie jest określony. Czasem (w niektórych podręcznikach) przyjmuje się, że argumentem liczby 0 jest 0.

Przykład 10 Zilustrować na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb zespolonych spełniających warunek

$$a) \arg z \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$$

$$b) \arg(z - 1 + j) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$$

a) Podany warunek oznacza, że liczby z będą reprezentowane przez punkty z obszaru kąta ograniczonego przez półproste wyprowadzone z punktu 0, dla których argumenty to odpowiednio:

$$\phi_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad \phi_2 = \frac{\pi}{3}$$

b) W tym przypadku obszar kątowy należy odpowiednio przesunąć.

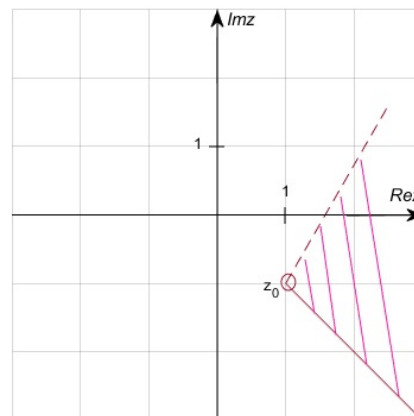
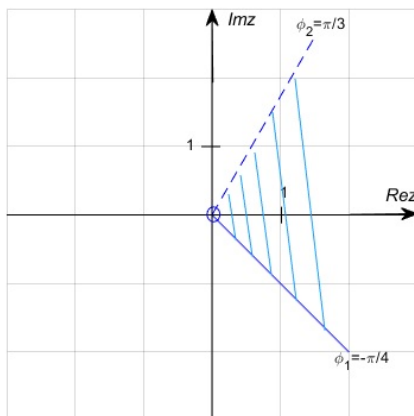
Przyjmijmy $w = z - 1 + j = z - (1 - j) = z - z_0$, $z_0 = 1 - j$.

Wtedy warunek przyjmie postać $\arg w \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Liczby w należą do tego samego zbioru, co liczby z z przykładu a).

Liczby z określone są jako $z = w + z_0$.

Obszar z przykładu a) należy przesunąć równoległe tak, aby wierzchołek kąta znalazł się w $z_0 = 1 - j$.



POSTAĆ TRYGNOMETRYCZNA LICZBY ZESPOLONEJ

Liczbę zespoloną $z \neq 0$ możemy zapisać jako

$$z = \operatorname{Re} z + j \operatorname{Im} z = |z| \left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} + j \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \right) = |z| (\cos \varphi + j \sin \varphi),$$

gdzie $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.

Def. **Postać trygonometryczna** liczby zespolonej $z \neq 0$ to zapis

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi),$$

gdzie $r = |z|$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.

Uwaga: Postać trygonometryczna liczby zespolonej nie jest określona jednoznacznie.

Niech $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$, $r_1, r_2 > 0$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.

Wówczas $z_1 = z_2 \Leftrightarrow (r_1 = r_2 \text{ i istnieje } k \in \mathbb{Z} \text{ takie, że } \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi)$

Przykład 11 *Podać postać trygonometryczną podanych liczb.*

1. $z_1 = 5 = 5(1 + 0 \cdot j) = 5(\cos 0 + j \sin 0) = 5(\cos(2k\pi) + j \sin(2k\pi))$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$;
2. $z_2 = j = 1(0 + j) = 1(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}) = 1(\cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + j \sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi))$;
3. $z_3 = -1 = 1(-1 + 0) = 1(\cos \pi + j \sin \pi) = 1(\cos(\pi + 2k\pi) + j \sin(\pi + 2k\pi))$;
4. $z_4 = -j = 1(0 - j) = 1(\cos \frac{-\pi}{2} + j \sin \frac{-\pi}{2}) = 1(\cos \frac{3\pi}{2} + j \sin \frac{3\pi}{2}) =$
 $= 1(\cos(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi) + j \sin(\frac{-\pi}{2} + 2k\pi))$;
5. $z_5 = -1 + j = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + j \sin \frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi) + j \sin(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi))$;
6. $z_6 = 1 - j\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos(\frac{-\pi}{3}) + j \sin(\frac{-\pi}{3})) = 2(\cos(\frac{5\pi}{3}) + j \sin(\frac{5\pi}{3})) =$
 $= 2(\cos(\frac{-\pi}{3} + 2k\pi) + j \sin(\frac{-\pi}{3} + 2k\pi))$

Postać trygonometryczna pozwala na prostą interpretację mnożenia liczb zespolonych.

Obliczymy iloczyn liczb $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 \cdot r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + j(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Oznacza to, że przy mnożeniu liczb zespolonych mnożymy ich moduły, a argumenty dodajemy.

W szczególnym przypadku, gdy wykonujemy mnożenie liczby z przez liczbę o module równym 1, czyli przez liczbę postaci $\cos \alpha + j \sin \alpha$ geometryczna interpretacja mnożenia to obrót liczby z (punktu na płaszczyźnie zespolonej) o kąt α w lewo wokół punktu (liczby) 0.

DZIAŁANIA NA LICZBACH ZESPOLONYCH W POSTACI TRYGONOMETRYCZNEJ

Niech $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$, $z = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi)$

iloczyn: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$

iloraz: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$

potęgowanie: $z^n = |z|^n [\cos(n\varphi) + j \sin(n\varphi)]$, dla $n \in \mathbb{N}$ (wzór Moivre'a)

sprzężenie: $\bar{z} = |z|(\cos(-\varphi) + j \sin(-\varphi))$

przeciwna: $-z = |z|(\cos(\varphi + \pi) + j \sin(\varphi + \pi))$.

Uwaga: Jeśli $|z| = 1$, to $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

Przykład 12 Wykonać obliczenia, wykorzystując postać trygonometryczną liczby zespolonej.

$$1. (1 + j\sqrt{3})(1 + j) = 2\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2(\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}) \cdot \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4}) = \\ = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{12} + j \sin \frac{7\pi}{12}\right).$$

Wykonując mnożenie w postaci kanonicznej dostaniemy

$$(1 + j\sqrt{3})(1 + j) = 1 - \sqrt{3} + j(1 + \sqrt{3}).$$

Porównując części rzeczywiste i urojone uzyskanych wyników dosytaniemy przy okazji

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

$$2. \operatorname{Im}\left((-1 - j)^{13}\right) = \operatorname{Im}\left[\left(\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + j \sin \frac{5\pi}{4})\right)^{13}\right] = \\ = \operatorname{Im}\left[(\sqrt{2})^{13}(\cos \frac{65\pi}{4} + j \sin \frac{65\pi}{4})\right] = \operatorname{Im}\left[2^{\frac{13}{2}}\left(\cos(16\pi + \frac{\pi}{4}) + j \sin(16\pi + \frac{\pi}{4})\right)\right] = \\ = \operatorname{Im}\left[2^{\frac{13}{2}}(\cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4})\right] = \operatorname{Im}\left[2^6\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \operatorname{Im}[2^6 + j2^6] = 2^6.$$

POSTAĆ WYKŁADNICZA LICZBY ZESPOLONEJ

Wykorzystując narzędzia analizy zespolonej można wprowadzić jeszcze jedną bardzo użyteczną postać liczby zespolonej. Definiując zespoloną funkcję wykładniczą $f(z) = e^z$ można wypro-
wadzić następujące zależności:

Wzory Eulera:

$$e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy}, \quad \text{gdzie } e^{jy} = \cos y + j \sin y, \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Def. **Postać wykładnicza** liczby zespolonej $z \neq 0$ to zapis

$$z = re^{j\varphi},$$

gdzie $r = |z|$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.

Uwaga: Po wstawieniu $x = 0$, $y = \pi$ do wzoru Eulera dostaniemy $e^{j\pi} = -1$.

Stąd znana równość

$$e^{j\pi} + 1 = 0,$$

wiążąca najważniejsze stałe matematyczne.

Przykład 13 Podać postać wykładniczą liczb zespolonych.

$$1. z_1 = 7 = 7e^{0j}$$

$$2. z_2 = -3 = 3e^{j\pi}$$

$$3. z_3 = 2j = 2e^{\frac{\pi}{2}j}$$

$$4. z_4 = -\pi j = \pi e^{\frac{3\pi}{2}j} = \pi e^{\frac{-\pi}{2}j}$$

$$5. z_5 = 1 - j = \sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}j} = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}j}$$

Przykład 14 Wykorzystując postać wykładniczą obliczyć

$$(1 + j)^{22} \cdot (\sqrt{3} - j)^{21} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j}\right)^{22} \cdot \left(2e^{\frac{-\pi}{6}j}\right)^{21} = 2^{11}e^{\frac{11\pi}{2}j} \cdot 2^{21}e^{\frac{-7\pi}{2}j} = 2^{32}e^{2\pi j} = 2^{32}e^{0j} = 2^{32}.$$

PIERWIASTKI Z LICZB ZESPOLONYCH

Niech $n \in \mathbb{N}$.

Def. Liczbę $t \in \mathbb{C}$ nazywamy **pierwiastkiem stopnia n** z liczby $z \in \mathbb{C}$, jeśli $t^n = z$.

Uwaga: Dla dowolnego n jedynym pierwiastkiem stopnia n z liczby 0 jest 0.

Twierdzenie.

Jeśli $z \neq 0$, to istnieje dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n z liczby z . Pierwiastki stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby $z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in \mathbb{R}$, wyrażają się wzorami:

$$t_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq k \leq n - 1.$$

Wyprowadzenie wzorów:

Niech $z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$. Szukamy takich $t = r_t(\cos \alpha + j \sin \alpha)$,

dla których zachodzi $t^n = z$, czyli

$$\left(r_t(\cos \alpha + j \sin \alpha) \right)^n = r(\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

Stąd $r_t^n(\cos \alpha + j \sin \alpha)^n = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$

i dalej równość $r_t^n(\cos n\alpha + j \sin n\alpha) = r(\cos \varphi + j \sin \varphi)$,

która zachodzi, gdy równe są moduły liczb po obu stronach, czyli $r_t^n = r$,

a dla argumentów zachodzi związek: $n\alpha = \varphi + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$.

Ostatecznie dostajemy $r_k = \sqrt[n]{r}$, (pierwiastek rzeczywisty z r stopnia n) $\alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$.

Pierwiastek stopnia n z liczby zespolonej $z \neq 0$, który ma najmniejszy nieujemny argument nazywamy **pierwiastkiem głównym** stopnia n z liczby z .

Uwaga: Pierwiastki stopnia $n \geq 2$ z liczby zespolonej $z \neq 0$ znajdują się na okręgu o środku w 0 i promieniu równym $\sqrt[n]{|z|}$, i dzielą ten okrąg na n równych łuków.

Symbolem $\sqrt[n]{z}$ oznaczamy zbiór wszystkich pierwiastków n -tego stopnia z liczby z .

$$\sqrt[n]{z} = \{t \in \mathbb{C} : t^n = z\}$$

Przykład 15 Wyznamy pierwiastki 3-ciego stopnia z liczby $z = 8j = 8 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2})$.

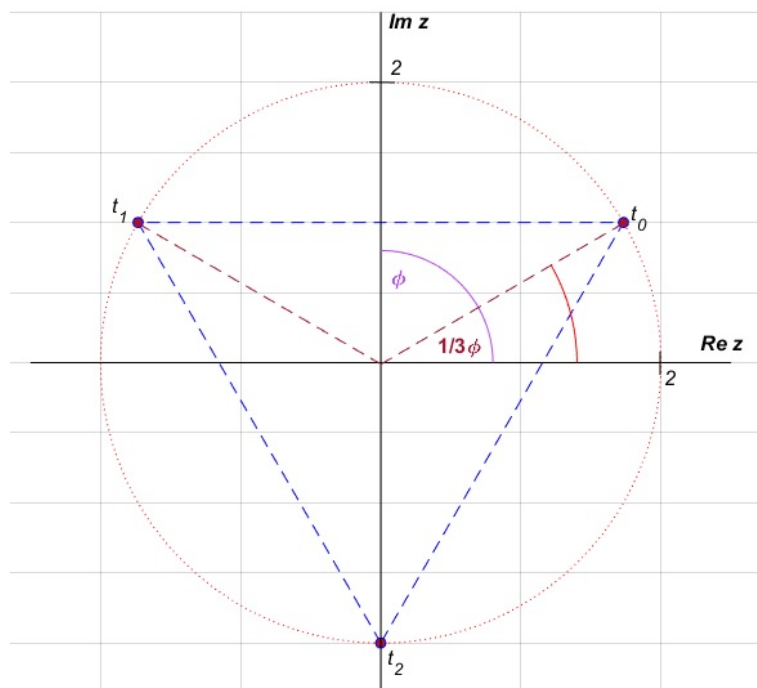
Moduł liczby $z = 8j$ jest równy 8, więc moduł liczb $\sqrt[3]{8j}$ jest równy 2.

Argument liczby $z = 8j$ jest równy $\varphi = \frac{\pi}{2}$, więc argument jednego z pierwiastków 3-ciego stopnia z liczby z jest równy $\frac{\varphi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Stąd dostajemy pierwiastek główny: $t_0 = 2(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6})$.

Argumenty pozostałych dwóch pierwiastków różnią się od $\frac{\pi}{6}$ o wielokrotność kąta $\frac{2\pi}{3}$.

Trzem pierwiastkom $\sqrt[3]{8j}$ odpowiadają na płaszczyźnie zespolonej punkty będące wierzchołkami trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o środku w 0 i promieniu $r = 2$, takiego którego jednym z wierzchołków jest punkt t_0 .



Obliczenia:

$$t_0 = \sqrt[3]{8}(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j) = \sqrt{3} + j$$

$$t_1 = \sqrt[3]{8}(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}) + j \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})) = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + j \sin(\frac{5\pi}{6})) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} + j$$

$$t_2 = \sqrt[3]{8}(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}) + j \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3})) = 2(\cos(\frac{3\pi}{2}) + j \sin(\frac{3\pi}{2})) = 2(0 - j) = -2j$$

Zbiór pierwiastków: $\sqrt[3]{1} = \{\sqrt{3} + j, -\sqrt{3} + j, -2j\}$.

Przykład 16 Wyznaczymy pierwiastki 3-ciego oraz 4-tego stopnia z liczby

$$z = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + j \sin 0).$$

$$\sqrt[3]{1}: t_0 = \sqrt[3]{1}(\cos \frac{0}{3} + j \sin \frac{0}{3}) = 1$$

$$t_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{0}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{0}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{0}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{0}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Zbiór pierwiastków: } \sqrt[3]{1} = \left\{1, -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

$$\sqrt[4]{1}: t_0 = \sqrt[4]{1}(\cos \frac{0}{4} + j \sin \frac{0}{4}) = 1$$

$$t_1 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{0}{4} + \frac{2\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{0}{4} + \frac{2\pi}{4}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = j$$

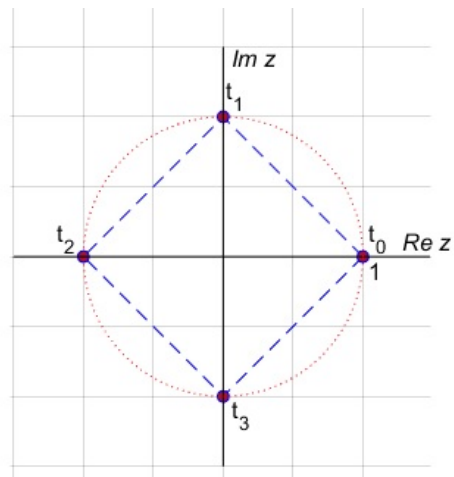
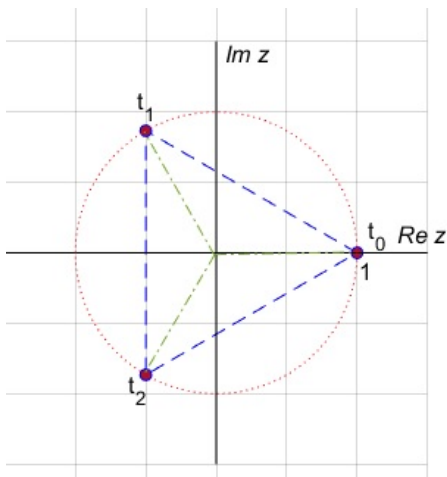
$$t_2 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{0}{4} + \frac{4\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{0}{4} + \frac{4\pi}{4}\right)\right) = \left(\cos(\pi) + j \sin(\pi)\right) = -1$$

$$t_3 = \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{0}{4} + \frac{6\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{0}{4} + \frac{6\pi}{4}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -j$$

$$\text{Zbiór pierwiastków: } \sqrt[4]{1} = \{1, j, -1, -j\}.$$

$$\sqrt[3]{1} = \left\{1, -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$\sqrt[4]{1} = \{1, j, -1, -j\}$$



Pierwiastki n -tego stopnia z 1 będziemy umownie oznaczać symbolami ω_k , ($0 \leq k \leq n-1$).

$$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + j \sin \frac{2k\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + j \sin \frac{2\pi}{n}\right)^k = \omega_1^k$$

Uwaga: Zbiór wszystkich pierwiastków stopnia n z 1 oznaczamy \mathbb{C}_n .

Algebra (\mathbb{C}_n, \cdot) jest grupą.

W szczególności iloczyn pierwiastków n -tego stopnia z 1 też jest pierwiastkiem n -tego stopnia z 1, podobnie jak odwrotność pierwiastka n -tego stopnia z 1.

Uwaga: Suma wszystkich pierwiastków stopnia $n \geq 2$ z 1 jest równa 0.

Iloczyn wszystkich pierwiastków stopnia $n \geq 2$ z 1 jest równy $(-1)^{n-1}$.

Fakt. Niech $t \in \mathbb{C}$ będzie dowolnym pierwiastkiem stopnia n z liczby $z \neq 0$.

Wówczas $\sqrt[n]{z} = \{t \cdot \omega_k : k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq k \leq n-1\}$.

Z powyższego faktu wynika, że znając jeden z pierwiastków n -tego stopnia z liczby z możemy wyznaczyć pozostałe, mnożąc go przez pierwiastki n -tego stopnia z 1.

Przykład 17 Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $z^4 = (2 + j)^8$.

Zauważmy, że $z^4 = [(2 + j)^2]^4$,

więc jednym z rozwiązań jest liczba $z_0 = (2 + j)^2 = 3 + 4j$.

Liczba z_0 jest jednocześnie jednym z pośród czterech pierwiastków $\sqrt[4]{(2 + j)^8}$.

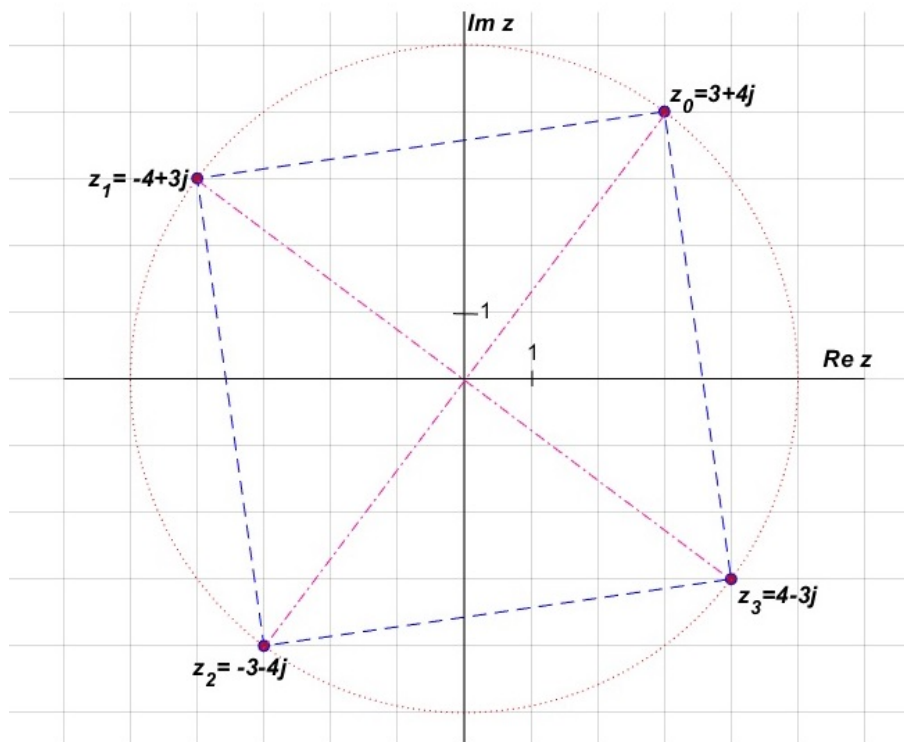
Uzyskamy je, mnożąc z_0 przez pierwiastki 4-tego stopnia z 1, czyli liczby: 1, j , -1 , $-j$.

$$z_1 = j \cdot z_0 = j(3 + 4j) = -4 + 3j$$

$$z_2 = (-1) \cdot z_0 = -3 - 4j$$

$$z_3 = (-j) \cdot z_0 = -j(3 + 4j) = 4 - 3j$$

W interpretacji geometrycznej mnożeniu przez pierwiastki 4-tego stopnia z 1 odpowiada obrót punktów wokół 0 o kąt $\frac{\pi}{2}$ w lewo.



W dotychczasowych przykładach wyznaczania pierwiastków z liczby z była prosta sytuacja: znaleźliśmy postać trygonometryczną liczby z lub znaleźliśmy jeden z pierwiastków. Generalnie nie zawsze tak będzie.

Przykład 18 Wyznaczyć $\sqrt[3]{1+3j}$.

Musimy wyznaczyć moduł i argument φ liczby $z = 1 + 3j$.

$$|z| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Stąd, uwzględniając, że z jest w I ćwiartce płaszczyzny, dostaniemy $\varphi = \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Następnie wyznaczamy pierwiastki:

$$t_0 = \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi}{3} + j \sin \frac{\varphi}{3} \right) = \sqrt[3]{10} \left(\cos \left(\frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} \right) + j \sin \left(\frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \right).$$

Kolejne pierwiastki dostaniemy mnożąc t_0 przez $\sqrt[3]{1}$, czyli przez liczby $-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$t_1 = t_0 \cdot \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$t_2 = t_0 \cdot \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Można oczywiście te obliczenia wykonać numerycznie przy użyciu narzędzia obliczeniowego.

PIERWIASTKI KWADRATOWE LICZBY ZESPOLONEJ

Pierwiastki kwadratowe możemy wyznaczyć wykorzystując wzory na pierwiastki stopnia n dla $n = 2$.

Liczba $z \neq 0$ posiada dwa pierwiastki - są to liczby przeciwne.

Pierwiastki kwadratowe możemy też wyznaczyć korzystając z postaci kanonicznej liczby z .

Dla $z = x + jy$ szukamy $t = a + jb$ takiego, że $t^2 = z$.

Dostajemy do rozwiązania równanie $(a + jb)^2 = x + jy$.

$$a^2 + 2jab - b^2 = x + jy$$

Porównujemy części rzeczywiste i urojone dla obu stron równości.

$$(1) \quad a^2 - b^2 = x$$

$$(2) \quad 2ab = y$$

Wykorzystamy jeszcze równość modułów liczb t^2 i z .

$$|t^2| = a^2 + b^2, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(3) \quad a^2 + b^2 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dodając równania (1) i (3) wyznaczymy a i następnie obliczymy y wykorzystując równanie (2).

Przykład 19 Wyznaczyć $\sqrt{3-4j}$.

Szukamy $t = a + bj$ spełniającego warunki $t^2 = 3 - 4j$, $|t^2| = |3 - 4j| = 5$

Dostajemy równania:

$$(1) \quad a^2 - b^2 = 3$$

$$(2) \quad 2ab = -4$$

$$(3) \quad a^2 + b^2 = 5$$

$$Z (1)+(2) \text{ mamy } 2a^2 = 8 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$Z (3)-(1) \text{ mamy } 2b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm 1$$

Uwzględniając (2) $ab = -2$ dostaniemy rozwiązania

$$a_1 = 2, b_1 = -1 \quad \text{lub} \quad a_2 = -2, b_2 = 1.$$

$$\text{Ostatecznie } t_1 = 2 - j, t_2 = -2 + j.$$

Na koniec jeszcze przykład wykorzystania postaci wykładniczej do rozwiązywania równań.

Przykład 20 Wykorzystując postać wykładniczą rozwiązać równanie $z^5 = 8\bar{z}^2$.

Postać wykładniczą możemy zapisać dla liczby $z \neq 0$, więc osobno rozważamy przypadek $z = 0$. Sprawdzamy, że $0^5 = 8 \cdot \bar{0}^2$, więc 0 jest jednym z rozwiązań.

Dla $z \neq 0$ przyjmujemy $z = re^{\varphi j}$.

$$\text{Mamy więc } z^5 = (re^{\varphi j})^5 = r^5 e^{5\varphi j}, \quad \bar{z} = re^{-\varphi j}, \quad \bar{z}^2 = (re^{-\varphi j})^2 = r^2 e^{-2\varphi j}.$$

Wstawiamy do równania i dostajemy

$$r^5 e^{5\varphi j} = 8r^2 e^{-2\varphi j}.$$

$$\text{Warunek na moduły: } r^5 = 8r^2, r \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow r = 2.$$

$$\text{Warunek na argumenty: } 5\varphi = -2\varphi + 2k\pi \text{ dla } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{stąd } 7\varphi = 2k\pi, \text{ czyli } \varphi = \frac{k}{7} \cdot 2\pi \text{ dla } k \in \mathbb{Z}.$$

Wystarczy wziąć $k = 0, 1, \dots, 6$, bo dla innych $k \in \mathbb{Z}$ rozwiązania będą się powtarzać.

Ostatecznie rozwiązania to 0, $z_k = 2 \cdot e^{\frac{k}{7} \cdot 2\pi j}$ dla $k \in \{0, 1, \dots, 6\}$.

W interpretacji geometrycznej niezerowe rozwiązania to wierzchołki 7-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 2 i o środku w 0, takie że jednym z wierzchołków jest $z_0 = 2$.

Uwaga: Gdy rozwiązujemy równania z liczbami zespolonymi, gdzie występuje z lub \bar{z} , $|z|$ w potęgze wyższej niż 2, wygodniej zazwyczaj będzie używać postaci wykładniczej lub trygonometrycznej liczby z , a nie kanonicznej.