Teoria mnogości to dział matematyki zajmujący się badaniem ogólnych własności zbiorów niezależnie od natury elementów, z których się składają.
Twórcą tej teorii był matematyk niemiecki Georg Cantor (1845 - 1918).

Pojęcia pierwotne teorii mnogości to **zbiór** oraz bycie **elementem** zbioru.

Stosujemy następujące zapisy:
$x \in A$ — x jest elementem zbioru A; $x \notin A$ — x nie należy do zbioru A
Definiujemy następujące podstawowe pojęcia:

- $\emptyset$ — **zbiór pusty** (nie ma żadnego elementu, $\forall x \; x \notin \emptyset$)
- Relacja **inkluzji** (zawierania) — $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$ (A jest podzbiorem B)
  Symbole $\subseteq$ i $\subset$ traktować będziemy równoważnie.
- **Równość zbiorów** — $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

Uwaga: Zbiór pusty jest tylko jeden i jest on podzbiorem każdego zbioru.

Uwaga: Dla dowolnego zbioru A zachodzi $A \subseteq A$ oraz $\emptyset \subseteq A$.
Dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi implikacja $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$.

Inkluzja właściwa $A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$.
Gdy $A \subsetneq B$, mówimy, że A jest podzbiorem właściwym zbioru B.

Sposoby definiowania zbiorów:
1. Wypisanie elementów zbioru, np. $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Uwaga: Przy wypisywaniu elementów zbioru nie jest ważna ich kolejność, ani wielokrotne pojawienie się np.
$\{a, b\} = \{b, a\} = \{b, b, a, b, a\}$ – to ten sam zbiór, który ma dwa różne elementy a i b.
Elementami zbioru mogą być zbiory, elementy mogą być obiektami różnego typu.

Przykład 1. $A = \{\emptyset, 1, 3, \{1, 2\}\}$
Zbiór A ma 4 elementy.
Zachodzą dla niego np. relacje:
$1 \in A$, $1 \nsubseteq A$, $\{3\} \notin A$, $\{3\} \subseteq A$, $2 \notin A$ $2 \nsubseteq A$, $\{2\} \notin A$ $\{2\} \nsubseteq A$,
$\{1, 3\} \subseteq A$, $\{1, 3\} \notin A$, $\{1, 2\} \nsubseteq A$, $\{1, 2\} \in A$, $\emptyset \in A$, $\emptyset \subseteq A$, $\{\emptyset\} \subseteq A$.

Uwaga: $\{\emptyset\} \neq \emptyset$; $\{\emptyset\}$ jest zbiorem 1-elementowym, którego elementem jest $\emptyset$.

2. Określenie zbioru za pomocą funkcji zdaniowej — gromadzenie elementów mających wspólną cechę opisaną pewną funkcją zdaniową. Ogół elementów $x \in X$, które mają własność $W(x)$ oznaczamy $\{x \in X : W(x)\}$.

Przykład 2.
a) $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty)$;
b) $\{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}\ n = 2k\} = 2\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych parzystych.

3. Zbiór jako obraz zbioru wyznaczony przez funkcję – $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$
(więcej na wykładzie o funkcjach).

Przykład 3.
a) $\{2k : k \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$ – zbiór liczb całkowitych parzystych,
b) $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ – zbiór kwadratów liczb naturalnych.

Podstawowe działania na zbiorach

Wyróżniamy trzy podstawowe działania dwuargumentowe na zbiorach.

Sumę zbiorów A i B definiujemy jako

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Jest to zbiór składający się ze wszystkich elementów zbioru A, wszystkich elementów zbioru B i niezawierający żadnych innych elementów.

Iloczyn lub **przecięcie** lub **część wspólną** zbiorów A i B definiujemy jako

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Jest to zbiór składający się z elementów zbioru A, które są jednocześnie elementami zbioru B.

Różnicę zbiorów A i B definiujemy jako

$$A \setminus B = A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Jest to zbiór składający się ze wszystkich tych elementów zbioru A, które nie są elementami zbioru B.

Uwaga: Następujące warunki są równoważne:
$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A \;\Leftrightarrow\; A \setminus B = \emptyset$

Przykład 4. Niech
$A = \mathbb{N} \cap \Big((-5,\ 3) \cup (7,\ 8)\Big)$, $\quad B = \Big(\mathbb{N} \cap (-5, 3)\Big) \cup (7,\ 8)$, $\quad C = \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{1, 4, \{\emptyset\}\}$.
Wtedy
$A = \{1, 2\}$;
$B = \{1, 2\} \cup (7,\ 8)$;
$C = \{\emptyset, 1, 4, \{\emptyset\}\}$;
$B \cup C = \{\emptyset, 1, 2, 4, \{\emptyset\}\} \cup (7,\ 8)$;
$A \setminus (B \cup C) = \emptyset$, czyli $A \subseteq (B \cup C)$.

W zastosowaniach teorii zbiorów ograniczamy się na ogół do rozważania tylko takich zbiorów, które są podzbiorami pewnego ustalonego zbioru zwanego **przestrzenią** (**uniwersum**).

Niech X będzie ustaloną przestrzenią.
Dopełnieniem zbioru $A \subseteq X$ nazywamy zbiór $A' = X \setminus A$.
Dopełnienie zbioru zależy od uniwersum.

Przykład 5. Niech $A = \{1\}$.
a) Dla $X = \mathbb{N}$ $\quad A' = \mathbb{N} \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, \ldots\}$;
b) Dla $X = \mathbb{R}$ $\quad A' = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$;
c) Dla $X = \{0, 1\}$ $\quad A' = \{0\}$.

Własności działań na zbiorach

A, B, C - dowolne zbiory

1. $A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cup A = A \qquad A \cap A = A$ — idempotentność
3. $A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$ — przemienność
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — łączność
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — rozdzielność
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ — prawa de Morgana
   $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Własności dopełnienia

$X' = \emptyset$	$\emptyset' = X$	
$A \cup A' = X$	$A \cap A' = \emptyset$	$(A')' = A$
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$	prawa de Morgana

Zbiór potęgowy $2^X = \{A : A \subseteq X\}$ (składa się z wszystkich podzbiorów danego zbioru)

Uwaga: $\emptyset \in 2^X$ i $X \in 2^X$ dla dowolnego zbioru X.

Uwaga: Jeśli zbiór X ma $n \in \mathbb{N}$ elementów, to zbiór 2^X ma 2^n elementów.

Przykład 6.

a) Dla $A = \{1, 2, 3\}$ mamy $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;

b) Dla $A = \{a\}$ mamy $2^A = \{\emptyset, \{a\}\}$;

c) Dla $A = \emptyset$ mamy $2^A = \{\emptyset\}$.

Produkt – iloczyn kartezjański zbiorów

Symbolem (x, y) oznaczamy **uporządkowaną parę** elementów x i y.

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$.

Uwaga. $(x, y) = (y, x) \Leftrightarrow x = y$

Def. **Iloczynem kartezjańskim zbiorów** X i Y nazywamy zbiór

$$X \times Y = \begin{cases} \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\} & \text{jeśli } X \neq \emptyset \text{ i } Y \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{jeśli } X = \emptyset \text{ lub } Y = \emptyset \end{cases}$$

Stosujemy oznaczenie $X \times X = X^2$.

Uwaga. Jeżeli X, Y - niepuste zbiory oraz $X \neq Y$ to $X \times Y \neq Y \times X$.

Uwaga. Jeżeli zbiór X ma $n \in \mathbb{N}$ elementów, zbiór Y ma $m \in \mathbb{N}$ elementów,
to zbiór $X \times Y$ ma $n \cdot m$ elementów.

Przykład 7.

a) Niech $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$. Wtedy

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$, $B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$.

b) Niech $A = (1,\ 2)$, $B = [0,\ 3]$. Wtedy

$A \times B = (1,\ 2) \times [0,\ 3] = \{(x, y) :\ 1 < x < 2\ \wedge\ 0 \leqslant y \leqslant 3\}$ – prostokąt na płaszczyźnie bez boków pionowych.

c) Niech $A = \{1,\ 2\}$, $B = [0,\ 3)$. Wtedy

$A \times B = \{1,\ 2\} \times [0,\ 3) = \{(x, y) :\ (x = 1 \vee x = 2)\ \wedge y \in [0,\ 3)\}$ – dwa pionowe odcinki na płaszczyźnie bez górnych końców.

Uwaga. Dla dowolnych zbiorów X, Y, Z zachodzi równość

$X \times (Y \diamond Z) = (X \times Y) \diamond (X \times Z)$,

gdzie $\diamond$ oznacza $\cup$, $\cap$ lub $\setminus$.

Uogólnienie - produkt skończonej liczby zbiorów

Podobnie jak pary uporządkowane można zdefiniować n-elementowe układy $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jako obiekty rozróżniające swoje kolejne współrzędne.

Niech X_1, X_2, ... , X_n - zbiory niepuste ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$), wtedy definiujemy

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, ..., x_n) : x_1 \in X_1 \wedge ... \wedge x_n \in X_n\}$$

W przypadku gdy zbiory się powtarzają tosujemy oznaczenie

$$\underbrace{X \times X \times ... \times X}_{n \text{ razy}} = X^n$$

Podstawowym zbiorem, który będzie modelem dla wielu pojęć na tym wykładzie jest n-wymiarowa przestrzeń rzeczywista

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : \ x_i \in \mathbb{R} \text{ dla } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Szczególne przyklady to:

$\mathbb{R}^2$ – model płaszczyzny, $\mathbb{R}^3$ – model 3-wymiarowej przestrzeni.

Indeksowane rodziny zbiorów, uogólnione sumy i iloczyny rodzin zbiorów

Niech $X \neq \emptyset$, $T \neq \emptyset$.

Def. **Indeksowaną rodziną podzbiorów** zbioru X nazywamy funkcję $f : T \to 2^X$.

Elementy zbioru T nazywamy **indeksami**.

Funkcja f przyporządkowuje każdemu indeksowi $t \in T$ pewien zbiór.

Oznaczmy go przez A_t. $A_t \subseteq X$.

Indeksowaną rodzinę zbiorów oznaczać będziemy przez $(A_t)_{t \in T}$.

Mówimy, że zbiór A_t należy do rodziny $(A_t)_{t \in T}$ (jest elementem tej rodziny).

Przykład 8.

Niech $X = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{N}$, $A_t = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{t} \leqslant x \leqslant t\}$.

Elementami tej rodziny są przedziały domknięte $[\frac{1}{t},\ t]$.

Przykładowe zbiory z tej rodziny:

$A_1 = \{1\}$,

$A_2 = [\frac{1}{2}, 2]$,

$A_{10} = [\frac{1}{10}, 10]$.

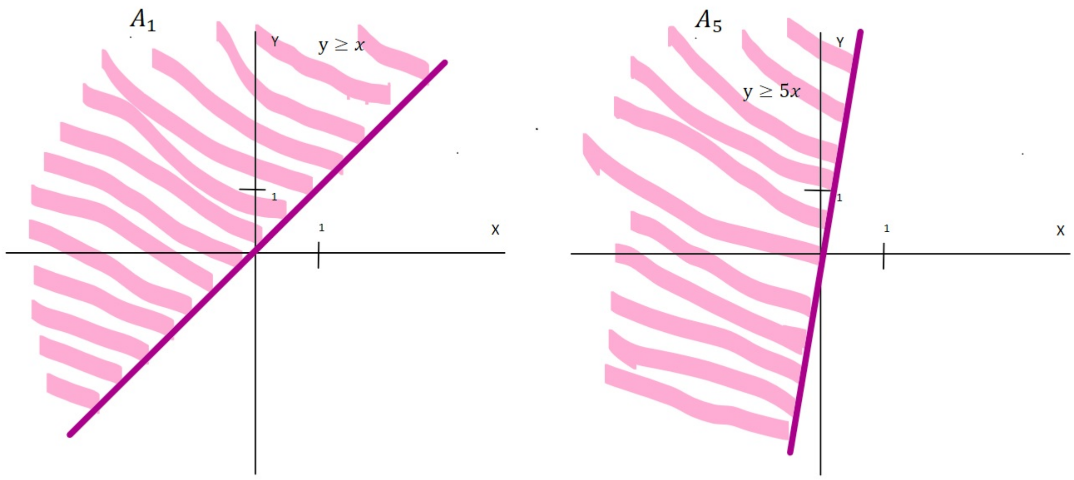
Zauważmy, że dla tej rodziny zachodzi własność $t_1 < t_2 \Rightarrow A_{t_1} \subseteq A_{t_2}$,

czyli zbiory z mniejszymi indeksami są podzbiorami zbiorów z większymi indeksami.

Rodzinę o takiej własności nazywamy rodziną **wstępującą**.

Przykład 9.

Niech $X = \mathbb{R}^2$, $T = \mathbb{N}$, $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geqslant t \cdot x\}$.



Niech $(A_t)_{t \in T}$ - dowolna indeksowana rodzina podzbiorów zbioru X.

Def. **Uogólnioną sumą zbiorów** A_t, $t \in T$ nazywamy zbiór

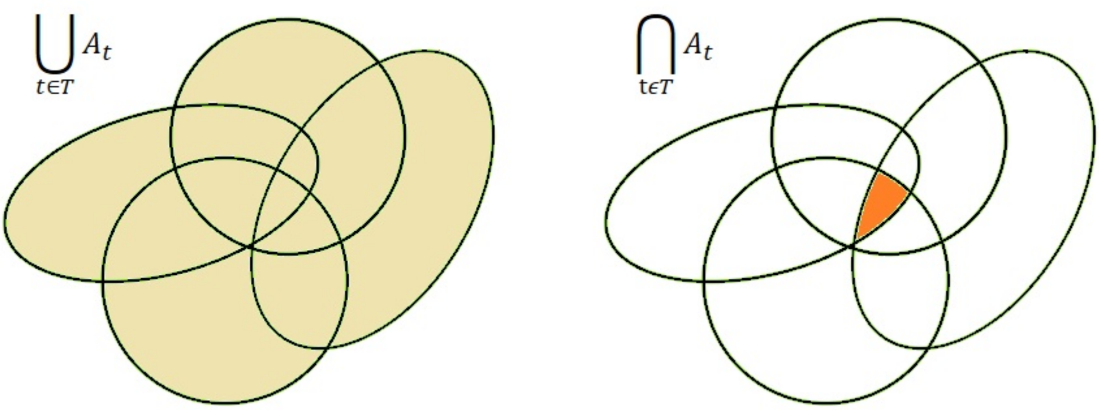
$$\bigcup_{t \in T} A_t = \{x \in X : \exists t \in T\ x \in A_t\}.$$

Def. **Uogólnionym iloczynem (przecięciem) zbiorów** A_t, $t \in T$ nazywamy zbiór

$$\bigcap_{t \in T} A_t = \{x \in X : \forall t \in T\ x \in A_t\}.$$

Uwaga: W przypadku gdy zbiór $T \subseteq \mathbb{N}$ jest zbiorem $T = \{n \in \mathbb{N} :\ n \geqslant n_0\}$ stosowane są oznaczenia:

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n, \qquad \bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_n.$$



Uwaga: Własności uogólnionej sumy i iloczynu można zapisać następująco:

$$x \in \bigcup_{t\in T} A_t \Leftrightarrow \exists t\in T \; x \in A_t, \qquad x \in \bigcap_{t\in T} A_t \Leftrightarrow \forall t\in T \; x \in A_t$$

Uogólniona suma rodziny zbiorów jest najmniejszym zbiorem zawierającym wszystkie zbiory tej rodziny.

Uogólniony iloczyn rodziny zbiorów jest największym zbiorem zawartym w każdym zbiorze tej rodziny.

Przykład 10.

Wyznaczyć uogólnioną sumę oraz iloczyn rodziny zbiorów z przykładu 8.

Dla rodziny przedziałów $A_t = [\frac{1}{t},\ t],\ T = \mathbb{N}$ mamy $\bigcup_{t\in T} A_t = (0,\ +\infty)$,

gdyż każda liczba $x \in (0,\ +\infty)$ należy do jakiegoś przedziału A_t (wystarczy dobrać odpowiednio duże t);

Z kolei $\bigcap_{t\in T} A_t = \{1\}$, gdyż tylko liczba 1 należy do wszystkich zbiorów A_t.

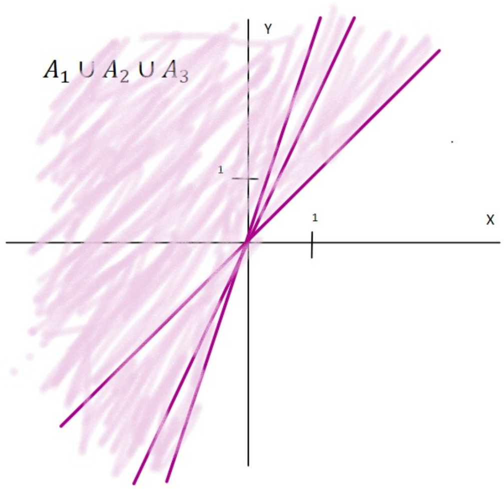
Dla rodziny wstępującej mamy $\bigcap_{t\in T} A_t = A_1$, czyli jest to zbiór z najmniejszym indeksem.

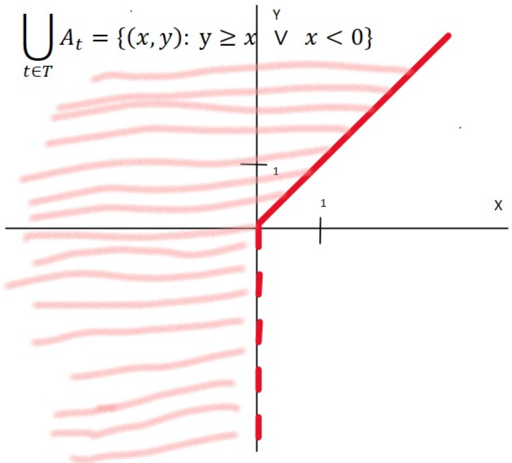
Przykład 11.

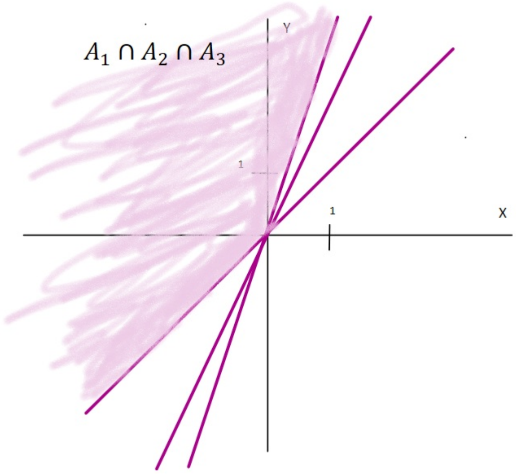
Wyznaczyć uogólnioną sumę oraz iloczyn rodziny zbiorów z przykładu 9.

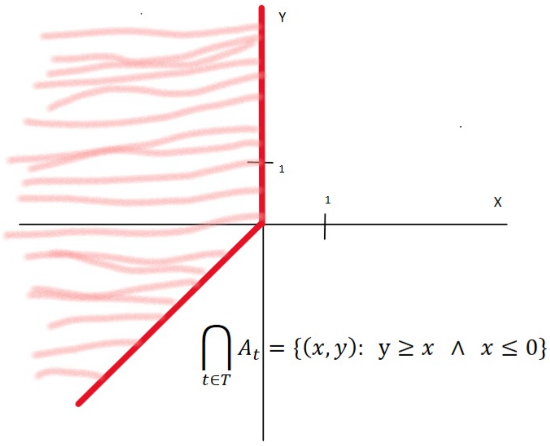
Dla rodziny zbiorów $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geqslant t \cdot x\},\ T = \mathbb{N}$

mamy rozwiązania przedstawione na poniższych rysunkach.









Własności działań uogólnionych

Tw. *Jeżeli $(A_t)_{t\in T}$ jest indeksowaną rodziną podzbiorów zbioru X i $A \subseteq X$, to prawdziwe są następujące zależności:*

1. *Dla każdego $s \in T$ mamy $A_s \subseteq \bigcup_{t\in T} A_t$.*
2. *Dla każdego $s \in T$ mamy $\bigcap_{t\in T} A_t \subseteq A_s$.*
3. *Jeżeli $S \subseteq T$ to $\bigcup_{t\in S} A_t \subseteq \bigcup_{t\in T} A_t$ oraz $\bigcap_{t\in S} A_t \supseteq \bigcap_{t\in T} A_t$.*
4. *Jeżeli istnieją $t_1, \ldots, t_n$ takie, że $\forall t \in T \ A_t \subseteq A_{t_1} \cup \ldots \cup A_{t_n}$, to*
$$\bigcup_{t\in T} (A_t) = A_{t_1} \cup \ldots \cup A_{t_n}.$$
5. *W szczególności, jeżeli istnieją $t_1, \ldots, t_n$ takie, że $A_{t_1} \cup \ldots \cup A_{t_n} = X$, to*
$$\bigcup_{t\in T} (A_t) = X.$$

6. *Jeżeli istnieją* $t_1, \ldots, t_n$ *takie, że* $\forall t \in T \; A_{t_1} \cap \ldots \cap A_{t_n} \subseteq A_t$, *to*

$$\bigcap_{t \in T} (A_t) = A_{t_1} \cap \ldots \cap A_{t_n}.$$

7. *W szczególności, jeżeli istnieją* $t_1, \ldots, t_n$ *takie, że* $A_{t_1} \cap \ldots \cap A_{t_n} = \emptyset$, *to*

$$\bigcap_{t \in T} (A_t) = \emptyset.$$

8. *Zachodzą prawa de Morgana:*

$$(\bigcup_{t \in T} A_t)' = \bigcap_{t \in T} (A_t)' \quad \textit{oraz} \quad (\bigcap_{t \in T} A_t)' = \bigcup_{t \in T} (A_t)'.$$

Przykład 12. Dla rodziny przedziałów $A_t = [2 \cdot (-1)^t, \; 2 \cdot (-1)^t + \frac{5}{t}], \; t \in \mathbb{N}$ wyznaczyć jej uogólnioną sumę i przecięcie.

$A_1 = [-2, \; 3]$, $\qquad A_2 = [2, \; 4\frac{1}{2}]$,

$A_3 = [-2, -\frac{1}{3}]$, $\qquad A_4 = [2, \; 3\frac{1}{4}]$,

$A_5 = [-2, -1]$, $\qquad A_6 = [2, \; 2\frac{5}{6}]$, $\ldots$

Zauważmy, że dla zbiorów z indeksami parzystymi mamy $A_{2k} \subseteq A_2 = [2, \; 4\frac{1}{2}]$,

zaś dla zbiorów z indeksami nieparzystymi mamy $A_{2k-1} \subseteq A_1 = [-2, \; 3]$.

Stąd dla każdego $t \in \mathbb{N}$ mamy $A_t \subseteq A_1 \cup A_2$.

Korzystając z własności 4. dostaniemy $\bigcup_{t \in \mathbb{N}} A_t = A_1 \cup A_2 = [-2, 4\frac{1}{2}]$.

Zauważmy, że $A_2 \cap A_3 = \emptyset$, stąd $\bigcap_{t \in \mathbb{N}} A_t = \emptyset$ (własność 7).