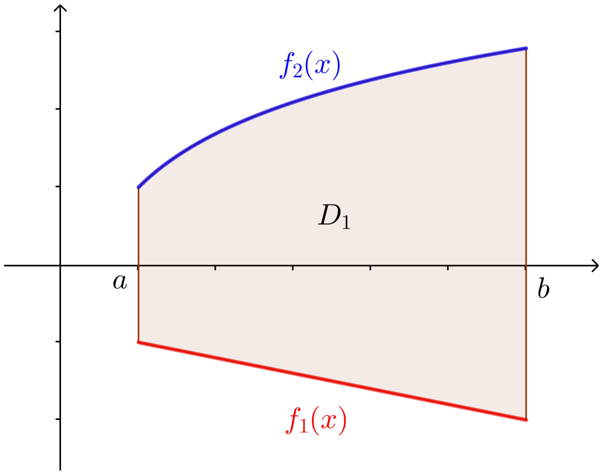
Metody Probabilistyczne i Statystyka
Z_0

1. Całka podwójna

Definicja 1. *Zbiór* $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ *nazywamy* **obszarem normalnym** *względem osi* OX*, jeśli*

$$D_1 = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)\},$$

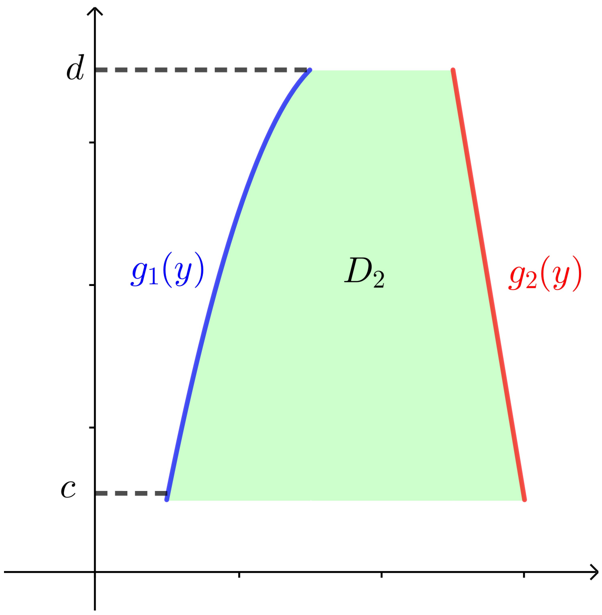
gdzie f_1 *i* f_2 *są funkcjami ciągłymi w przedziale* $[a;b]$.



Definicja 2. *Zbiór* $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ *nazywamy* **obszarem normalnym** *względem osi* OY*, jeśli*

$$D_2 = \{(x,y) : c \leqslant y \leqslant d,\ g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y)\},$$

gdzie g_1 *i* g_2 *są funkcjami ciągłymi w przedziale* $[c;d]$.



Uwagi:

- Jeśli funkcja f jest ciągła w obszarze normalnym D_1, to

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\right) dx \overset{ozn.}{=} \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

- Jeśli funkcja f jest ciągła w obszarze normalnym D_2, to

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy \overset{ozn.}{=} \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Powyższe całki nazywamy **całkami iterowanymi**.

1.1 Obliczyć całki:

(a) $\iint_D xy\,dxdy$, gdzie $D = [0;2] \times [1;4]$;

(b) $\iint\limits_D 3\,dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi $x = 2$, $y = 1$, $y = 2$, $y - x = 2$.

1.2 Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $f(x,y) = \frac{3}{4} \cdot x \cdot \mathbf{1}_D(x,y)$, gdzie D jest obszarem ograniczonym prostymi $x = 2$, $y = x$ oraz krzywą $xy = 1$.

(a) Obliczyć $\iint_D f(x,y)\,dxdy$,

(b) Wyznaczyć funkcje $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

Uwaga:

$$\mathbf{1}_D(x,y) = \begin{cases} 1 & , \text{ gdy}(x,y) \in D \\ 0 & , \text{ gdy}(x,y) \notin D \end{cases}.$$

2. Kombinatoryka

2.1 Ile różnych słów, mających sens lub nie, można ułożyć poprzez przestawienie liter wyrazu "Massachusetts"?

2.2 Na ile sposobów można podzielić grupę złożoną z 12 osób na trzy drużyny tak, aby

(a) jedna drużyna była dwuosobowa i dwie pięcioosobowe?

(b) w każdej drużynie były po cztery osoby?

2.3 Na ile sposobów można n rozróżnialnych kul umieścić w n pudełkach tak, aby

(a) nie było pustych pudełek?

(b) dokładnie jedno pudełko było puste?

2.4 Na ile sposobów z 15 par butów można wylosować 4 buty tak, aby nie było wśród nich żadnej pary?