Metody Probabilistyczne i Statystyka

Z_3

1. Zmienna losowa X ma rozkład dyskretny o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ \frac{1}{8} & , \quad 1 \leqslant x < 2 \\ \frac{1}{2} & , \quad 2 \leqslant x < 3 \\ \frac{3}{4} & , \quad 3 \leqslant x < 4 \\ 1 & , \quad x \geqslant 4 \end{cases} .$$

Wyznaczyć nośnik oraz funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X. Obliczyć $P(X^2 - X = 0)$.

2. Niech $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ i niech $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{4}$ dla każdej $\omega \in \Omega$. Dla zmiennych losowych $X(\omega) = \sin \dfrac{\pi\omega}{2}$ i $Y(\omega) = \cos \dfrac{\pi\omega}{2}$:

   (a) Wyznaczyć funkcje prawdopodobieństwa oraz dystrybuanty. Czy X i Y mają te same rozkłady?

   (b) Obliczyć $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$.

3. Wśród 10 monet dwie mają orły po obu stronach, reszta jest symetryczna. Losujemy jedną monetę i rzucamy nią do momentu wypadnięcia pierwszego orła. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę rzutów. Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, jeśli

   (a) rzucamy do momentu wypadnięcia pierwszego orła;

   (b) rzucamy do momentu wypadnięcia pierwszego orła, ale nie więcej niż trzy razy.

4. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o dystrybuancie

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ a\sqrt{x} + b & , \quad 1 \leqslant x < 4 \\ 1 & , \quad x \geqslant 4 \end{cases} .$$

Wyznaczyć stałe a i b oraz gęstość zmiennej losowej X. Obliczyć $P(X^2 \leqslant 4)$.

5. Sprawdzić, czy istnieje $a \in \mathbb{R}$, przy którym funkcja

$$f(x) = (ax - 1) \cdot \mathbf{1}_{(0;1)}(x)$$

jest gęstością rozkładu jednowymiarowej zmiennej losowej.

6. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości

$$f_X(x) = \begin{cases} a & , \quad x \in [-1; 0) \\ b(x^2 + x) & , \quad x \in [0; 1] \\ 0 & , \quad \text{w p.p.} \end{cases} ,$$

gdzie a i b są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Wiadomo, że $P(X < 0) = \dfrac{1}{6}$.

   (a) Wyznaczyć a i b oraz dystrybuantę zmiennej losowej X.

   (b) Obliczyć $P\left(|X| > \dfrac{1}{2}\right)$.