

Szeregi liczbowe

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – dowolny ciąg liczbowy (nieskończony).

Definiujemy nowy ciąg (S_n) o wyrazie ogólnym $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Def. Ciąg liczbowy (S_n) nazywamy **szeregiem liczbowym** o wyrazie ogólnym a_n i oznaczamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym, jeśli istnieje granica właściwa $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

W przeciwnym wypadku szereg jest rozbieżny.

Liczbę S nazywamy sumą szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, piszemy też $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Uwaga: Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oznacza i szereg o wyrazach a_n , i sumę tego szeregu.

Przykład 1. Zbadać z definicji zbieżność podanych szeregów.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Zauważmy, że $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Dostajemy

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Tak więc szereg jest zbieżny, a jego suma $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

Mamy $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

Dla parzystej liczby składników mamy $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k = 0$,

a dla nieparzystej – $S_{2n-1} = \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k = -1$.

Granica $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ nie istnieje, więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ jest rozbieżny.

Def. Szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są równe $\Leftrightarrow a_n = b_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Sumą szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nazywamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$.

Jeżeli oba szeregi są zbieżne i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, to $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

Przyjmujemy ponadto: $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{R}$.

Tw. 1. (Warunek konieczny zbieżności szeregu)

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Przykład 2. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ jest rozbieżny.

Dla danego szeregu wyraz $a_n = 2^n$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$,

więc nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

Na tej podstawie możemy stwierdzić, że szereg jest rozbieżny.

Warunki wystarczające zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych

Uwaga 1. Jeśli $a_n \geq 0$, to ciąg sum częściowych (S_n) jest niemalejący.

Zatem ciąg sum (S_n) jest zbieżny \Leftrightarrow jest ograniczony.

Tw. 2. (kryterium całkowe zbieżności szeregów liczbowych)

Niech m oznacza dowolną liczbę naturalną.

Jeżeli funkcja f jest nierosnąca i nieujemna na przedziale $[m, +\infty)$,

to szereg liczbowy $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ i całka $\int_m^{+\infty} f(x) dx$

są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne.

Przykład 3. Zbadać, dla jakich $\alpha \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ jest zbieżny, a dla jakich rozbieżny.

Na początku sprawdzimy warunek konieczny zbieżności szeregu.

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ jedynie dla $\alpha > 0$.

Dla $\alpha \leq 0$ warunek konieczny nie jest spełniony, więc wtedy szereg jest rozbieżny.

Spełnienie warunku koniecznego nie wystarczy, by stwierdzić zbieżność szeregu.

Należy wykorzystać inne kryterium, by zbadać zbieżność szeregu dla $\alpha > 0$.

Wykorzystamy kryterium całkowe. Badamy zbieżność całki $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \int_1^{\infty} x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \lim_{T \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} & \text{dla } \alpha \neq 1 \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \ln T - \ln 1 & \text{dla } \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{dla } \alpha > 1; \\ +\infty & \text{dla } \alpha < 1; \\ +\infty & \text{dla } \alpha = 1 \end{cases}$$

Całka jest zbieżna jedynie dla $\alpha > 1$ i dla takich α zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Dla pozostałych α zarówno całka jak i szereg są rozbieżne.

W szczególności rozbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, zwany **szeregiem harmonicznym**.

Tw. 3. (kryterium porównawcze) Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są szeregami o wyrazach nieujemnych, oraz $a_n \leq b_n$ dla $n \geq n_0$, to

1. jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny;
2. jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Przykład 4. Zbadać zbieżność szeregów.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$

Zauważmy, że $0 \leq a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$,

a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ jest zbieżny jako szereg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{2}$.

Korzystając z kryterium porównawczego dostajemy, że badany szereg jest zbieżny.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \arctg n}$

Z własności funkcji arcus tangens mamy: $\frac{\pi}{4} = \arctg 1 \leq \arctg n \leq \frac{\pi}{2}$.

Stąd $\frac{4}{n\pi} = \frac{1}{n \cdot \frac{\pi}{4}} \geq \frac{1}{n \cdot \arctg n} \geq \frac{1}{n \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n\pi}$.

Istotne jest oszacowanie wyrazów szeregu z dołu $a_n = \frac{1}{n \cdot \arctg n} \geq \frac{2}{n\pi}$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny (patrz przykład 3).

Korzystając z kryterium porównawczego dla szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \arctg n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}$,

dostajemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \arctg n}$ jest rozbieżny.

Tw. 4. (kryterium Cauchy'ego) Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach nieujemnych i istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g$ (właściwa lub niewłaściwa), to

1. jeżeli $0 \leq g < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;
2. jeżeli $g > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Przykład 5. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}$.

Wyrazy szeregu są nieujemne i mamy oszacowanie z góry

$$a_n = \frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n} \leq \frac{4^n + 4^n}{4^n + 5^n} = \frac{2 \cdot 4^n}{4^n + 5^n} \leq \frac{2 \cdot 4^n}{5^n} = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n$ jest zbieżny jako szereg geometryczny o ilorazie $q = \frac{4}{5}$,

więc korzystając z kryterium porównawczego, dostajemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}$ też jest zbieżny.

Możemy wykorzystać kryterium Cauchy'ego. Badamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

$$\text{Mamy } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 4^n}{4^n + 5^n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + 5^n}} = \frac{4}{5} < 1.$$

Zgodnie z kryterium Cauchy'ego szereg jest zbieżny.

Tw. 5. (kryterium d'Alemberta) Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest szeregiem o wyrazach dodatnich i istnieje granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$ (właściwa lub niewłaściwa), to

1. jeżeli $0 \leq g < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny;
2. jeżeli $g > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

W obu twierdzeniach jeśli $g = 1$, to kryterium nie rozstrzyga o zbieżności badanego szeregu.

Przykład 6. Zbadać, dla jakich $a > 0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n}$ jest zbieżny, a dla jakich rozbieżny.

Wykorzystamy kryterium d'Alemberta. Badamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\begin{aligned} \text{Mamy } \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{a^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{a^n \cdot n!}{n^n}} = \frac{a^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{a^n \cdot n!} = \frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} = \\ &= \frac{a(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = a \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = a \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}. \end{aligned}$$

Wiadomo, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, więc

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = \frac{a}{e}.$$

Zgodnie z kryterium d'Alemberta, gdy $\frac{a}{e} < 1$, szereg jest zbieżny, czyli dla $a \in (0, e)$;

gdy $\frac{a}{e} > 1$, szereg jest rozbieżny, czyli dla $a \in (e, +\infty)$.

Oddzielnie sprawdzimy przypadek dla $a = e$.

$$\text{Wtedy } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

Z własności ciągu o wyrazach $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ wiadomo, że jest to ciąg rosnący, zbieżny do e ,

więc ciąg o wyrazach $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$ jest malejący i zbieżny do 1.

W takim razie wszystkie wyrazy $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ są większe od 1.

Mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, stąd $a_{n+1} > a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

czyli ciąg o dodatnich wyrazach a_n jest rosnący.

Wnioskujemy, że ciąg wyrazów a_n dla $a = e$ jest ciągiem rosnącym o wyrazach dodatnich, więc nie może być zbieżny do 0,

a to oznacza, że nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu.

Ostatecznie mamy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}$ jest rozbieżny.

Def. Szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ lub $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$,

gdzie $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ nazywamy szeregiem **naprzemiennym**.

Tw. 6. (kryterium Leibniza)

Jeżeli $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem nierosnącym i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ jest zbieżny

(podobnie szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$).

Przykład 7. Zbadać zbieżność szeregów.

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Jest to szereg naprzemienny z $a_n = \frac{1}{n}$.

Ciąg o wyrazach $\frac{1}{n}$ jest malejący i zbieżny do 0, więc spełnione są założenia kryterium Leibniza, w takim razie dany szereg jest zbieżny.

Podobnie zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^7}.$$

Jest to szereg naprzemienny z $a_n = \frac{1}{n^7}$.

Ciąg o wyrazach $\frac{1}{n^7}$ jest malejący i zbieżny do 0, więc spełnione są założenia kryterium Leibniza, w takim razie dany szereg jest zbieżny.

Podobnie zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^7}$.

O szeregu zbieżnym $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mówimy, że jest zbieżny **bezwzględnie**, jeśli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny,

to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny **warunkowo**.

Przykład 8. Zbadać bezwzględną i warunkową zbieżność szeregów z przykładu 7.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Sprawdzono już, że jest to szereg zbieżny.

Aby stwierdzić, czy jest on zbieżny bezwzględnie, należy sprawdzić, czy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$.

$$\text{Mamy } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Wiemy, że ten szereg jest rozbieżny (patrz przykład 3. szereg harmoniczny).

Ostatecznie badany szereg nie jest zbieżny bezwzględnie, jest zbieżny warunkowo.

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^7}.$$

Sprawdzono już, że jest to szereg zbieżny.

Aby stwierdzić, czy jest on zbieżny bezwzględnie, należy sprawdzić, czy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^7} \right|$.

$$\text{Mamy } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^7} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^7}.$$

Wiemy, że ten szereg jest zbieżny (patrz przykład 3. ($\alpha = 7 > 1$)).

Ostatecznie badany szereg jest zbieżny bezwzględnie.

Tw. 7. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny.

Przykład 9. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{n^2}$.

Badany szereg ma wyrazy i dodatnie i ujemne, gdyż wyrażenie $\sin n^2$ może przyjmować wartości dodatnie lub ujemne.

Zbadamy bezwzględną zbieżność szeregu, czyli zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n^2}{n^2} \right|$.

Mamy oszacowanie dla wyrazów szeregu $0 \leq \left| \frac{\sin n^2}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

Korzystamy z kryterium porównawczego dla szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n^2}{n^2} \right|$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Wiemy, że ten szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny (patrz przykład 3. ($\alpha = 2 > 1$)),

więc na mocy kryterium porównawczego zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n^2}{n^2} \right|$.

Oznacza to, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2}{n^2}$ jest zbieżny bezwzględnie.

Nie musimy już sprawdzać zbieżności tego szeregu, bo zgodnie z twierdzeniem 7. jego zbieżność wynika ze zbieżności bezwzględnej.