1. Sprawdzić, czy następujące wyrażenia są tautologiami:

   (a) $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \vee r) \Rightarrow (q \vee s)]$,

   (b) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$,

   (c) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r]$.

2. Student ma rozwiązać test, odpowiadając na każde z pięciu pytań "tak" lub "nie". Wiadomo, że egzaminator zawsze daje więcej pytań z odpowiedziami "tak" niż "nie" oraz że trzy kolejne pytania nie mogą mieć tej samej odpowiedzi. Z treści pytań wynika ponadto, że odpowiedzi na pytania 1 i 5 są przeciwne. Student umie odpowiedzieć tylko na pytanie 4, ale dzięki temu jest w stanie znaleźć jedyne poprawne rozwiązanie testu. Jakie to rozwiązanie?

3. Określić wartość logiczną zdań i zapisać ich zaprzeczenia bez symbolu negacji.

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ m < n$

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}\ (x < 1 \vee (\exists y \in \mathbb{R}\ x = |y|))$

   (c) $\exists x \in \mathbb{R}\ [x < \pi \Rightarrow \sin x > \pi]$

   (d) $(\exists x \in \mathbb{R}\ \sin x > \pi) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}\ x < \pi)$.

4. Zapisać symbolicznie zdania i formy zdaniowe. W zapisie formuł nie używać symbolu dzielenia ani podzielności liczb.

   (a) Istnieje najmniejsza liczba naturalna.

   (b) Istnieje liczba całkowita niepodzielna przez 7,

   (c) k jest liczbą naturalną niepodzielną przez siedem lub podzielną przez trzy.

   (d) k jest liczbą rzeczywistą, która nie jest kwadratem liczby całkowitej.

   (e) Każda liczba naturalna podzielna przez sześć jest liczbą parzystą.

5. Wyznaczyć zbiór elementów $x \in \mathbb{R}$ spełniających formę zdaniową $\varphi(x)$.

   (a) $\varphi(x):\ x < e \Leftrightarrow x \leqslant \pi$

   (b) $\varphi(x):\ \forall y \in \mathbb{R}\ x < y^2 + \pi$

   (c) $\varphi(x):\ x > e \Rightarrow (\forall y \in \mathbb{R}\ x < y^2 + \pi)$

   (d) $\varphi(x):\ \exists y \in \mathbb{R}\ x < \sin y$

6. Stosując zasadę indukcji matematycznej wykazać, że

   (a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{(n+1)}$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$

   (b) $1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+n\cdot(3n+1)=n(n+1)^2$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$

   (c) dla każdego $n\in\mathbb{N}$ liczby postaci $3^{4n+2}+1$ są podzielne przez 10.