Wartości i wektory własne macierzy

Niech $\mathbb{K}$ będzie ustalonym ciałem.

Def. Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ nazywamy **wartością własną** macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, jeśli istnieje niezerowy wektor $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$, taki że

$$AX = \lambda X.$$

Wektor X nazywamy wtedy **wektorem własnym** macierzy A odpowiadającym wartości własnej λ.

Przykład 1. Sprawdzimy, czy wektor X jest wektorem własnym macierzy A.

$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. $\quad$ Mamy $A \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

X jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej $\lambda = 2$.

Zauważmy, że wektorem własnym dla $\lambda = 2$ będzie też każdy wektor postaci αX, gdzie $\alpha \neq 0$.

$A \cdot \alpha X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ 4\alpha \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix} = 2 \cdot \alpha X$

Sprawdzimy, czy wektor $Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ jest wektorem własnym macierzy A.

Mamy $A \cdot Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

Wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ nie jest wielokrotnością wektora $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, więc nie jest wektorem własnym macierzy A.

Czy można wyznaczyć wartości i wektory własne macierzy nie zgadując ich?

Jeśli $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ jest wektorem własnym macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, dla wartości własnej $\lambda \in \mathbb{K}$, to spełnione jest równanie

$$A \cdot X = \lambda \cdot X$$

równoważnie $\quad A \cdot X - \lambda \cdot X = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{0} = [0]_{n\times 1})$,

równoważnie $\quad A \cdot X - \lambda \cdot I_n \cdot X = \mathbf{0}$,

równoważnie $\quad (A - \lambda \cdot I_n) \cdot X = \mathbf{0}$.

Ostatnie równanie macierzowe odpowiada jednorodnemu ukladowi n równań z n niewiadomymi.

Szukamy niezerowych rozwiązań X tego układu, a takie będą istniały jedynie wtedy, gdy macierz współczynników $[A - \lambda \cdot I_n]$ będzie osobliwa, czyli gdy $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$.

Def. **Wielomianem charakterystycznym macierzy** $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ nazywamy wielomian

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Wartości własne macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $\chi_A(\lambda)$. Jeżeli λ jest wartością własną macierzy A, to odpowiadające jej wektory własne są rozwiązaniami równania macierzowego

$$(A - \lambda I) \cdot X = \mathbf{0}.$$

Zbiór wektorów własnych macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ odpowiadających wartości własnej λ wraz z wektorem zerowym tworzy podprzestrzeń przestrzeni $M_{n\times 1}(\mathbb{K})$ (jest to jądro macierzy $[A - \lambda I]$). Podprzestrzeń tę oznaczamy symbolem V_λ i nazywamy przestrzenią własną odpowiadającą wartości własnej λ.

Przykład 2. Wyznaczymy wartości własne i wektory własne macierzy A z przykładu 1.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$$

Wartości własne to: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Wyznaczymy odpowiadające im wektory własne.

Dla $\lambda_1 = 2$ rozwiązujemy równanie $(A - \lambda_1 \cdot I) \cdot X = \mathbf{0}$, czyli $(A - 2I) \cdot X = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przekształcamy macierz rozszerzoną równoważnego układu równań

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \iff -2x + y = 0 \iff \begin{cases} y = 2x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Stąd wektor własny $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Dla $\lambda_1 = 2$ przykładowy wektor własny to $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, a przestrzeń własna $V_2 = Lin\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\}$.

Dla $\lambda_2 = -1$ rozwiązujemy równanie $(A - \lambda_2 \cdot I) \cdot X = \mathbf{0}$, czyli $(A + I) \cdot X = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} 0+1 & 1 \\ 2 & 1+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przekształcamy macierz rozszerzoną równoważnego układu równań

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \iff x+y=0 \iff \begin{cases} y=-x \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Stąd wektor własny $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Dla $\lambda_2 = -1$ przykładowy wektor własny to $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,

a przestrzeń własna $V_{-1} = Lin\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\}$.

Przykład 3. Wyznaczymy wartości własne i wektory własne macierzy $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\left[\begin{array}{cc|c} -1-\lambda & -3 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ \hline -1 & -1 & 2-\lambda \end{array}\right] = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$= (2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$.

Wartości własne to: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2$ - podwójna.

Wyznaczymy odpowiadające im wektory własne.

Dla $\lambda_1 = 1$ rozwiązujemy równanie $(A-\lambda_1\cdot I)\cdot X = \mathbf{0}$, czyli $(A-I)\cdot X = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} -1-1 & -3 & 0 \\ 2 & 4-1 & 0 \\ -1 & -1 & 2-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przekształcamy macierz rozszerzoną równoważnego układu równań

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Stąd $\begin{cases} x+\frac{3}{2}y=0 \\ \frac{1}{2}y+z=0 \\ y\in\mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\frac{3}{2}y \\ z=-\frac{1}{2}y \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$

Stąd wektor własny $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}y \\ y \\ -\frac{1}{2}y \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}y\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \widetilde{y}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dla $\lambda_1 = 1$ przykładowy wektor własny to $X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

a przestrzeń własna $V_1 = Lin\{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

Dla $\lambda_{2,3} = 2$ rozwiązujemy równanie $(A - \lambda \cdot I) \cdot X = \mathbf{0}$, czyli $(A - 2I) \cdot X = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} -1-2 & -3 & 0 \\ 2 & 4-2 & 0 \\ -1 & -1 & 2-2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przekształcamy macierz rozszerzoną równoważnego układu równań

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \iff \begin{cases} -x - y = 0 \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ y, z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Stąd wektory własne $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dla $\lambda_{2,3} = 2$ przykładowe wektory własne to $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

a przestrzeń własna $V_2 = Lin\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

Przykład 4. Nie każda macierz posiada wartości własne.

Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ $\quad \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$

Wielomian charakterystyczny macierzy A nie posiada rzeczywistych pierwiastków, więc macierz A nie ma rzeczywistych wartości własnych.

Def. Mówimy, że macierze A i B są **podobne**, jeśli istnieje macierz nieosobliwa C, taka że $A = CBC^{-1}$.

Uwaga: Jeśli macierze A i B są podobne, to mają jednakowe wielomiany charakterystyczne.

Def. Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ nazywamy **diagonalizowalną**, jeśli istnieje nieosobliwa macierz $C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ i diagonalna macierz $D \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, takie że $A = C \cdot D \cdot C^{-1}$.

Tw. Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liniowo niezależny układ n wektorów własnych macierzy A.

Załóżmy, że $(X_1, ..., X_n)$ jest liniowo niezależnym układem wektorów własnych macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, czyli istnieją $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, takie że $AX_1 = \lambda_1 X_1$, ..., $AX_n = \lambda_n X_n$.
Wówczas zachodzi równość $A = CDC^{-1}$, gdzie $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $C = [X_1, ..., X_n]$.

Przykład 5. Przeprowadzimy diagonalizację macierzy z przykładu 2.

Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mamy liniowo niezależny układ $(X_1, X_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ składający się z wektorów własnych dla wartości własnych $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$.

Stąd macierz $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, a macierz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

W kolumnach macierzy C zapisane są wektory własne w kolejności odpowiadającej wartościom własnym zapisanym w macierzy D.

Można sprawdzić, że zachodzi $A = CDC^{-1}$.

Przykład 6. Przeprowadzimy diagonalizację macierzy z przykładu 3.

Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

mamy liniowo niezależny układ $(X_1, X_2, X_3) = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

składający się z wektorów własnych dla wartości własnych $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2$.

Stąd np. macierz $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

a wtedy macierz $C = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

W kolumnach macierzy C zapisane są wektory własne w kolejności odpowiadającej wartościom własnym zapisanym w macierzy D.

Tw. Wektory własne macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

Stw. Jeśli λ jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, to $1 \leqslant \dim V_\lambda \leqslant k$.
Jeśli λ jest jednokrotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, to $\dim V_\lambda = 1$

Tw. Niech $\chi_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \cdot ... \cdot (\lambda_m - \lambda)^{k_m}$, gdzie $\lambda_i \neq \lambda_j$ dla $i \neq j$, będzie wielomianem charakterystycznym macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ $(k_1 + ... + k_m = n)$.
Macierz A jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim V_{\lambda_i} = k_i$ dla każdego $i = 1, ..., m$.
(Przestrzeń własna dla każdej wartości własnej ma wymiar równy krotności tej wartości własnej.)

Wniosek. Jeśli macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ma n różnych wartości własnych,
to jest diagonalizowalna.

Przykład 7. Nie każda macierz jest diagonalizowalna.

Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

mamy $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{bmatrix} = -(1+\lambda)^3.$

Macierz A posiada potrójną wartość własną $\lambda = -1$.

Wyznaczymy wektory własne.

Dla $\lambda = -1$ rozwiązujemy równanie $(A - \lambda \cdot I) \cdot X = \mathbf{0}$, czyli $(A + I) \cdot X = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} 2+1 & -1 & 2 \\ 5 & -3+1 & 3 \\ -1 & 0 & -2+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przekształcamy macierz rozszerzoną równoważnego układu równań

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Stąd $\begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \\ z\in\mathbb{R}\end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=-z \\ z\in\mathbb{R}\end{cases} \iff X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -z\\ -z\\ z\end{bmatrix}=z\begin{bmatrix} -1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}.$

Dla $\lambda=-1$ przykładowy wektor własny to $X_1=\begin{bmatrix} -1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$, a przestrzeń $V_{-1}=Lin\{\begin{bmatrix} -1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\}$.

Wymiar przestrzeni własnej V_{-1} jest równy 1, więc jest mniejszy od krotności wartości własnej. W takiej sytuacji macierz A nie jest diagonalizowalna.

Stw. Jeśli $A=C\cdot \operatorname{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)\cdot C^{-1}$, to dla dowolnego wielomianu $w(x)$ zachodzi równość

$$w(A)=C\cdot \operatorname{diag}(w(\lambda_1),...,w(\lambda_n))\cdot C^{-1}.$$

Przykład 8. Możemy łatwo wyznaczyć potęgi i wielomiany macierzy diagonalizowalnych. np. macierz A^{100} dla $A=C\cdot D\cdot C^{-1}$, gdzie C - macierz nieosobliwa, $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$.

Mamy $A^{100}=\left(C\cdot D\cdot C^{-1}\right)^{100}=C\cdot D\cdot C^{-1}\cdot C\cdot D\cdot C^{-1}\cdot\ldots C\cdot D\cdot C^{-1}\cdot C\cdot D\cdot C^{-1}\cdot=$

$=C\cdot D\cdot(C^{-1}\cdot C)\cdot D\cdot C^{-1}\cdot\ldots C\cdot D\cdot(C^{-1}\cdot C)\cdot D\cdot C^{-1}=C\cdot D\cdot I_n\cdot D\cdot I_n\cdot D\ldots\cdot I_n\cdot D\cdot C^{-1}=$

$=C\cdot D^{100}\cdot C^{-1}=C\cdot[\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)]^{100}\cdot C^{-1}=C\cdot[\operatorname{diag}(\lambda_1^{100},\lambda_2^{100},\ldots,\lambda_n^{100})]\cdot C^{-1}$

Stw. Jeśli macierz $A=C\cdot \operatorname{diag}(\lambda_1,...,\lambda_n)\cdot C^{-1}$ jest odwracalna, to

$$A^{-1}=C\cdot \operatorname{diag}(\frac{1}{\lambda_1},...,\frac{1}{\lambda_n})\cdot C^{-1}.$$

(Jeśli λ jest wartością własną macierzy A, to $\frac{1}{\lambda}$ jest wartością własną macierzy A^{-1}.)

Uwaga: Jeśli X jest wektorem własnym macierzy A, a λ jest odpowiadającą mu wartością własną, to wektor X będzie też wektorem własnym macierzy A^n oraz macierzy A^{-1} i odpowiadać mu będzie wartość własna λ^n (i odpowiednio $\frac{1}{\lambda}$).

Tw. (Cayleya-Hamiltona)
Jeżeli $\chi_A(\lambda)$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy A, to $\chi_A(A)=\mathbf{0}$.

Przykład 9. Zastosowanie tw. Cayleya-Hamiltona.

Możemy wyznaczyć potęgi macierzy nie mnożąc jej przez siebie.

Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ - macierz z przykładu 2.

Wcześniej został wyznaczony jej wielomian charakterystyczny $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$

Zgodnie z tw. Cayleya-Hamiltona zachodzi równość $\chi_A(A) = \mathbf{0}$, czyli $A^2 - A - 2I = \mathbf{0}$. Stąd możemy wyliczyć kolejne potęgi macierzy A.

$A^2 = A + 2I$

$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot (A + 2I) = A^2 + 2A = A + 2I + 2A = 3A + 2I$

$A^4 = A \cdot A^3 = A \cdot (3A + 2I) = 3A^2 + 2A = 3(A + 2I) + 2A = 5A + 6I$ i t.d.

Wartości i wektory własne przekształceń liniowych

Niech V – przestrzeń liniowa nad $\mathbb{K}$, $\varphi : V \to V$ – przekształcenie liniowe.

Def. Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ nazywamy **wartością własną** przekształcenia φ, jeśli istnieje niezerowy wektor $v \in V$, taki że $\varphi(v) = \lambda \cdot v$.
Wektor v nazywamy wtedy **wektorem własnym** przekształcenia φ odpowiadającym wartości własnej λ.

Przykład 10. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ - przekształcenie liniowe, $\phi((x, y, z)) = (2x, 0, 0)$.

Sprawdzimy, czy podane wektory są wektorami własnymi tego przekształcenia.

$v_1 = (1, 0, 0) \Longrightarrow \phi(v_1) = \phi((1, 0, 0)) = (2, 0, 0) = 2 \cdot (1, 0, 0) = 2 \cdot v_1$,

więc v_1 jest wektorem własnym przekształcenia ϕ dla $\lambda = 2$;

$v_2 = (5, 0, 0) \Longrightarrow \phi(v_2) = \phi((5, 0, 0)) = (10, 0, 0) = 2 \cdot (5, 0, 0) = 2 \cdot v_2$,

więc v_2 jest wektorem własnym przekształcenia ϕ dla $\lambda = 2$;

$v_3 = (0, 1, 0) \Longrightarrow \phi(v_3) = \phi((0, 1, 0)) = (0, 0, 0) = 0 \cdot (0, 1, 0) = 0 \cdot v_3$,

więc v_3 jest wektorem własnym przekształcenia ϕ dla $\lambda = 0$;

$v_4 = (0, 0, 1) \Longrightarrow \phi(v_4) = \phi((0, 0, 1)) = (0, 0, 0) = 0 \cdot (0, 0, 1) = 0 \cdot v_4$,

więc v_4 jest wektorem własnym przekształcenia ϕ dla $\lambda = 0$;

$v_5 = (0, 1, 1) \Longrightarrow \phi(v_5) = \phi((0, 1, 1)) = (0, 0, 0) = 0 \cdot (0, 1, 1) = 0 \cdot v_5$,

więc v_5 jest wektorem własnym przekształcenia ϕ dla $\lambda = 0$;

$v_6 = (1, 1, 0) \Longrightarrow \phi(v_6) = \phi((1, 1, 0)) = (2, 0, 0) \neq \lambda \cdot (1, 1, 0)$, więc v_6 nie jest wektorem własnym przekształcenia ϕ.

Tw. Zbiór wektorów własnych przekształcenia liniowego φ odpowiadających tej samej wartości własnej λ wraz z wektorem zerowym tworzy podprzestrzeń przestrzeni V. Oznaczamy ją V_λ i nazywamy **podprzestrzenią własną** przekształcenia φ dla wartości własnej λ.

Przykład 11. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem pewnej płaszczyzny Π zawierającej punkt $(0,0,0)$.

Zauważmy, że wektor v prostopadły do płaszczyzny Π jest wektorem własnym tego przekształcenia, gdyż $\phi(v) = -v = -1 \cdot v$ (dla $\lambda = -1$)

Niezerowy wektor u należący do płaszczyzny Π jest też wektorem własnym tego przekształcenia, gdyż $\phi(u) = u = 1 \cdot u$ (dla $\lambda = 1$).

Wektor który nie jest ani prostopadły do Π ani nie należy do Π nie jest wektorem własnym tego przekształcenia, bo jego obraz nie należy do prostej wyznaczonej przez kierunek tego wektora.

Taka symetria ma dwie podprzestrzenie własne:

$V_1 = \Pi$ - płaszczyzna Π;

$V_{-1} = l \perp \Pi$ - prosta prostopadła do Π.

Jak wyznaczyć wektory i wartości własne przekształcenia liniowego?

Niech $\mathcal{A}$ - baza skończenie wymiarowej przestrzeni V.
Wektor $v \in V$ jest wektorem własnym przekształcenia φ wtedy i tylko wtedy, gdy $M_\mathcal{A}(v)$ jest wektorem własnym macierzy $M_\mathcal{A}^\mathcal{A}(\varphi)$.

Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ - różne bazy skończenie wymiarowej przestrzeni V.
Macierze $M_\mathcal{A}^\mathcal{A}(\varphi)$ i $M_\mathcal{B}^\mathcal{B}(\varphi)$ są podobne, zatem mają jednakowe wielomiany charakterystyczne.

Def. **Wielomianem charakterystycznym** przekształcenia liniowego φ nazywamy wielomian charakterystyczny macierzy $M_\mathcal{A}^\mathcal{A}(\varphi)$, gdzie $\mathcal{A}$ jest dowolną bazą przestrzeni V. Ozn. $\chi_\varphi(\lambda)$.

Wartości własne przekształcenia są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego tego przekształcenia. Współrzędne wektorów własnych w bazie $\mathcal{A}$ wyznaczamy rozwiązując równanie

$$(M_\mathcal{A}^\mathcal{A}(\varphi) - \lambda I) \cdot X = \mathbf{0}$$

(dla każdej wartości własnej osobno).

Przykład 12. Wyznaczymy wartości własne i podprzestrzenie własne przekształcenia liniowego $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \phi((x, y, z)) = (2x - y + 2z, 5x - 3y + 3z, -x - 2z)$.

Macierz tego przekształcenia w bazach kanonicznych to

$$M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(\phi) = A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$ – macierz z przykładu 7.

Mamy już wyznaczone jej wartości i wektory własne.

Macierz A ma potrójną wartość własną $\lambda = -1$, a przykładowy wektor własny to $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

a jedyna podprzestrzeń własna tej macierzy to $V_{-1} = Lin\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.

W takiej sytuacji wektor własny tego przekształcenia dla wartości własnej $\lambda = -1$

zapiszemy jako $v_1 = (-1, -1, 1)$,

a odpowiednia podprzestrzeń własna to $V_{-1} = Lin\{(-1, -1, 1)\} = \{(-x, -x, x) : \ x \in \mathbb{R}\}$.

Stw. Wektory własne przekształcenia liniowego $\varphi : V \to V$ odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.

Tw. Niech $\varphi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym, $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ - bazą przestrzeni V. Macierz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ jest macierzą diagonalną wtedy i tylko wtedy, gdy baza $\mathcal{B}$ składa się z wektorów własnych przekształcenia φ.
Wtedy wyrazy z głównej przekątnej macierzy $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ to wartości własne przekształcenia φ odpowiadające kolejnym wektorom własnym z bazy $\mathcal{B}$.

Tw. Baza skończenie wymiarowej przestrzeni V składająca się z wektorów własnych przekształcenia φ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy suma wymiarów wszystkich podprzestrzeni własnych przestrzeni V wyznaczonych przez przekształcenie φ jest równa wymiarowi przestrzeni V.

Jeśli chcemy sprawdzić, czy dla danego przekształcenia liniowego $\phi : V \to V$ istnieje baza $\mathcal{B}$ składająca się z wektorów własnych tego przeksztacenia, a znamy macierz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi)$, gdzie $\mathcal{A}$ jest pewną bazą przestrzeni V, to wystarczy sprawdzić, czy macierz $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi)$ jest diagonalizowalna.

Jeśli tak jest, czyli istnieje nieosobliwa macierz C oraz diagonalna macierz D, takie, że zachodzi równość

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi) = C \cdot D \cdot C^{-1},$$

to wyrazy na przekątnej macierzy D są wartościami własnymi przekształcenia ϕ, a odpowiadające im wektory własne tego przekształcenia zapisane są w kolumnach macierzy C.

Mamy więc $D = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)$ - macierz przekształcenia ϕ w bazie składającej się z wektorów własnych przekształcenia ϕ;

$C = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id)$ - macierz zmiany bazy i zachodzi równość

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(id) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(id).$$

Przykład 13. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ - przekształcenie liniowe.

$\mathcal{B} = ((1, -3, 0), (0, -1, 1), (3, -2, 1))$ - baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$,

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie podanych informacji można stwierdzić, że baza $\mathcal{B}$ składa się z wektorów własnych przekształcenia ϕ (gdyż macierz przekszałcenia w tej bazie jest diagonalna).

Liczba 1 jest wartością własną dla wektora $(1, -3, 0)$, więc $\phi((1, -3, 0)) = (1, -3, 0)$.

Liczba 2 jest wartością własną dla wektora $(3, -2, 1)$, więc $\phi((3, -2, 1)) = 2(3, -2, 1) = (6, -4, 2)$.

Liczba 0 jest wartością własną dla wektora $(0, -1, 1)$, więc $\phi((0, -1, 1)) = (0, 0, 0)$.

Podprzestrzeń własna $V_0 = Lin\{(0, -1, 1)\}$ jest jednocześnie jądrem tego przekształcenia.

Wektory własne dla niezerowych wartości własnych generują obraz tego przekształcenia, czyli przestrzeń $\operatorname{Im} \phi = Lin\{(1, -3, 0), (3, -2, 1)\}$.