

## TEORIA MNOGOŚCI

Teoria mnogości to dział matematyki zajmujący się badaniem ogólnych własności zbiorów niezależnie od natury elementów, z których się składają. Twórcą tej teorii był matematyk niemiecki Georg Cantor (1845 - 1918).

Pojęcia pierwotne teorii mnogości to **zbiór** oraz bycie **elementem** zbioru.

Stosujemy następujące zapisy:

$x \in A$  —  $x$  jest elementem zbioru  $A$ ;  $x \notin A$  —  $x$  nie należy do zbioru  $A$

Definiujemy następujące podstawowe pojęcia:

- $\emptyset$  — **zbiór pusty** (nie ma żadnego elementu,  $\forall x x \notin \emptyset$ )
- Relacja **inkluzji** (zawierania) —  $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$  ( $A$  jest podzbiorem  $B$ )  
Symbole  $\subseteq$  i  $\subset$  traktować będziemy równoważnie.
- **Równość zbiorów** —  $A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

**Uwaga:** Zbiór pusty jest tylko jeden i jest on podzbiorem każdego zbioru.

**Uwaga:** Dla dowolnego zbioru  $A$  zachodzi  $A \subseteq A$  oraz  $\emptyset \subseteq A$ .

Dla dowolnych zbiorów  $A$ ,  $B$  i  $C$  zachodzi implikacja  $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ .

**Inkluzja właściwa**  $A \subsetneq B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$ .

Gdy  $A \subsetneq B$ , mówimy, że  $A$  jest podzbiorem właściwym zbioru  $B$ .

### Sposoby definiowania zbiorów:

1. Wypisanie elementów zbioru, np.  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

**Uwaga:** Przy wypisywaniu elementów zbioru nie jest ważna ich kolejność, ani wielokrotne pojawienie się np.

$\{a, b\} = \{b, a\} = \{b, b, a, b, a\}$  – to ten sam zbiór, który ma dwa różne elementy  $a$  i  $b$ .

Elementami zbioru mogą być zbiory, elementy mogą być obiektami różnego typu.

**Przykład 1.**  $A = \{\emptyset, 1, 3, \{1, 2\}\}$

Zbiór  $A$  ma 4 elementy.

Zachodzą dla niego np. relacje:

$1 \in A$ ,  $1 \notin A$ ,  $\{3\} \notin A$ ,  $\{3\} \subseteq A$ ,  $2 \notin A$ ,  $2 \not\subseteq A$ ,  $\{2\} \notin A$ ,  $\{2\} \not\subseteq A$ ,  
 $\{1, 3\} \subseteq A$ ,  $\{1, 3\} \notin A$ ,  $\{1, 2\} \not\subseteq A$ ,  $\{1, 2\} \in A$ ,  $\emptyset \in A$ ,  $\emptyset \subseteq A$ ,  $\{\emptyset\} \subseteq A$ .

**Uwaga:**  $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ ;  $\{\emptyset\}$  jest zbiorem 1-elementowym, którego elementem jest  $\emptyset$ .

**2.** Określenie zbioru za pomocą funkcji zdaniowej — gromadzenie elementów mających wspólną cechę opisaną pewną funkcją zdaniową. Ogół elementów  $x \in X$ , które mają własność  $W(x)$  oznaczamy  $\{x \in X : W(x)\}$ .

**Przykład 2.**

a)  $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty)$ ;

b)  $\{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} n = 2k\} = 2\mathbb{Z}$  — zbiór liczb całkowitych parzystych.

**3.** Zbiór jako obraz zbioru wyznaczony przez funkcję —  $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$  (więcej na wykładzie o funkcjach).

**Przykład 3.**

a)  $\{2k : k \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$  — zbiór liczb całkowitych parzystych,

b)  $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$  — zbiór kwadratów liczb naturalnych.

## Podstawowe działania na zbiorach

Wyróżniamy trzy podstawowe działania dwuargumentowe na zbiorach.

**Sumę** zbiorów  $A$  i  $B$  definiujemy jako

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Jest to zbiór składający się ze wszystkich elementów zbioru  $A$ , wszystkich elementów zbioru  $B$  i niezawierający żadnych innych elementów.

**Iloczyn** lub **przecięcie** lub **część wspólną** zbiorów  $A$  i  $B$  definiujemy jako

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Jest to zbiór składający się z elementów zbioru  $A$ , które są jednocześnie elementami zbioru  $B$ .

**Różnicę** zbiorów  $A$  i  $B$  definiujemy jako

$$A \setminus B = A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Jest to zbiór składający się ze wszystkich tych elementów zbioru  $A$ , które nie są elementami zbioru  $B$ .

**Uwaga:** Następujące warunki są równoważne:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$$

**Przykład 4.** Niech

$$A = \mathbb{N} \cap ((-5, 3) \cup (7, 8)), \quad B = (\mathbb{N} \cap (-5, 3)) \cup (7, 8), \quad C = \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{1, 4, \{\emptyset\}\}.$$

Wtedy

$$A = \{1, 2\};$$

$$B = \{1, 2\} \cup (7, 8);$$

$$C = \{\emptyset, 1, 4, \{\emptyset\}\};$$

$$B \cup C = \{\emptyset, 1, 2, 4, \{\emptyset\}\} \cup (7, 8);$$

$$A \setminus (B \cup C) = \emptyset, \text{ czyli } A \subseteq (B \cup C).$$

W zastosowaniach teorii zbiorów ograniczamy się na ogół do rozważania tylko takich zbiorów, które są podzbiórmi pewnego ustalonego zbioru zwanego **przestrzenią** (**uniwersum**).

Niech  $X$  będzie ustaloną przestrzenią.

**Dopełnieniem** zbioru  $A \subseteq X$  nazywamy zbiór  $A' = X \setminus A$ .

Dopełnienie zbioru zależy od uniwersum.

**Przykład 5.** Niech  $A = \{1\}$ .

a) Dla  $X = \mathbb{N}$   $A' = \mathbb{N} \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$ ;

b) Dla  $X = \mathbb{R}$   $A' = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ;

c) Dla  $X = \{0, 1\}$   $A' = \{0\}$ .

### Własności działań na zbiorach

$A, B, C$  - dowolne zbiory

1.  $A \cup \emptyset = A$      $A \cap \emptyset = \emptyset$
2.  $A \cup A = A$      $A \cap A = A$     idempotentność
3.  $A \cup B = B \cup A$      $A \cap B = B \cap A$     przemienność
4.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$     łączność  
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$     rozdzielność  
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6.  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$     prawa de Morgana  
 $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

### Własności dopełnienia

$$\begin{aligned}
 X' &= \emptyset & \emptyset' &= X \\
 A \cup A' &= X & A \cap A' &= \emptyset & (A')' &= A \\
 (A \cup B)' &= A' \cap B' & (A \cap B)' &= A' \cup B' & \text{prawa de Morgana}
 \end{aligned}$$

**Zbiór potęgowy**  $2^X = \{A : A \subseteq X\}$  (składa się z wszystkich podzbiorów danego zbioru)

**Uwaga:**  $\emptyset \in 2^X$  i  $X \in 2^X$  dla dowolnego zbioru  $X$ .

**Uwaga:** Jeśli zbiór  $X$  ma  $n \in \mathbb{N}$  elementów, to zbiór  $2^X$  ma  $2^n$  elementów.

### Przykład 6.

- a) Dla  $A = \{1, 2, 3\}$  mamy  $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ ;
- b) Dla  $A = \{a\}$  mamy  $2^A = \{\emptyset, \{a\}\}$ ;
- c) Dla  $A = \emptyset$  mamy  $2^A = \{\emptyset\}$ .

### Produkt – iloczyn kartezjański zbiorów

Symbolem  $(x, y)$  oznaczamy **uporządkowaną parę** elementów  $x$  i  $y$ .

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2.$$

Uwaga.  $(x, y) = (y, x) \Leftrightarrow x = y$

Def. **Iloczynem kartezjańskim zbiorów**  $X$  i  $Y$  nazywamy zbiór

$$X \times Y = \begin{cases} \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\} & \text{jeśli } X \neq \emptyset \text{ i } Y \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{jeśli } X = \emptyset \text{ lub } Y = \emptyset \end{cases}$$

Stosujemy oznaczenie  $X \times X = X^2$ .

**Uwaga.** Jeżeli  $X, Y$  - niepuste zbiory oraz  $X \neq Y$  to  $X \times Y \neq Y \times X$ .

**Uwaga.** Jeżeli zbiór  $X$  ma  $n \in \mathbb{N}$  elementów, zbiór  $Y$  ma  $m \in \mathbb{N}$  elementów, to zbiór  $X \times Y$  ma  $n \cdot m$  elementów.

**Przykład 7.**

a) Niech  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$ . Wtedy

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}, \quad B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

b) Niech  $A = (1, 2)$ ,  $B = [0, 3]$ . Wtedy

$A \times B = (1, 2) \times [0, 3] = \{(x, y) : 1 < x < 2 \wedge 0 \leq y \leq 3\}$  – prostokąt na płaszczyźnie bez boków pionowych.

c) Niech  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = [0, 3]$ . Wtedy

$A \times B = \{1, 2\} \times [0, 3] = \{(x, y) : (x = 1 \vee x = 2) \wedge y \in [0, 3]\}$  – dwa pionowe odcinki na płaszczyźnie bez górnych końców.

**Uwaga.** Dla dowolnych zbiorów  $X, Y, Z$  zachodzi równość

$$X \times (Y \diamond Z) = (X \times Y) \diamond (X \times Z),$$

gdzie  $\diamond$  oznacza  $\cup$ ,  $\cap$  lub  $\setminus$ .

**Uogólnienie - produkt skończonej liczby zbiorów**

Podobnie jak pary uporządkowane można zdefiniować  $n$ -elementowe układy  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  jako obiekty rozróżniające swoje kolejne współrzędne.

Niech  $X_1, X_2, \dots, X_n$  - zbiory niepuste ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ), wtedy definiujemy

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in X_1 \wedge \dots \wedge x_n \in X_n\}$$

W przypadku gdy zbiory się powtarzają stosujemy oznaczenie

$$\underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ razy}} = X^n$$

Podstawowym zbiorem, który będzie modelem dla wielu pojęć na tym wykładzie jest  $n$ -wymiarowa przestrzeń rzeczywista

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ dla } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Szczególne przykłady to:

$\mathbb{R}^2$  – model płaszczyzny,  $\mathbb{R}^3$  – model 3-wymiarowej przestrzeni.

## Indeksowane rodziny zbiorów, uogólnione sumy i iloczyny rodzin zbiorów

Niech  $X \neq \emptyset$ ,  $T \neq \emptyset$ .

Def. **Indeksowaną rodziną podzbiorów** zbioru  $X$  nazywamy funkcję  $f : T \rightarrow 2^X$ .

Elementy zbioru  $T$  nazywamy **indeksami**.

Funkcja  $f$  przyporządkowuje każdemu indeksowi  $t \in T$  pewien zbiór.

Oznaczmy go przez  $A_t$ .  $A_t \subseteq X$ .

Indeksowaną rodzinę zbiorów oznaczać będziemy przez  $(A_t)_{t \in T}$ .

Mówimy, że zbiór  $A_t$  należy do rodziny  $(A_t)_{t \in T}$  (jest elementem tej rodziny).

### **Przykład 8.**

Niech  $X = \mathbb{R}$ ,  $T = \mathbb{N}$ ,  $A_t = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{t} \leq x \leq t\}$ .

Elementami tej rodziny są przedziały domknięte  $[\frac{1}{t}, t]$ .

Przykładowe zbiory z tej rodziny:

$$A_1 = \{1\},$$

$$A_2 = [\frac{1}{2}, 2],$$

$$A_{10} = [\frac{1}{10}, 10].$$

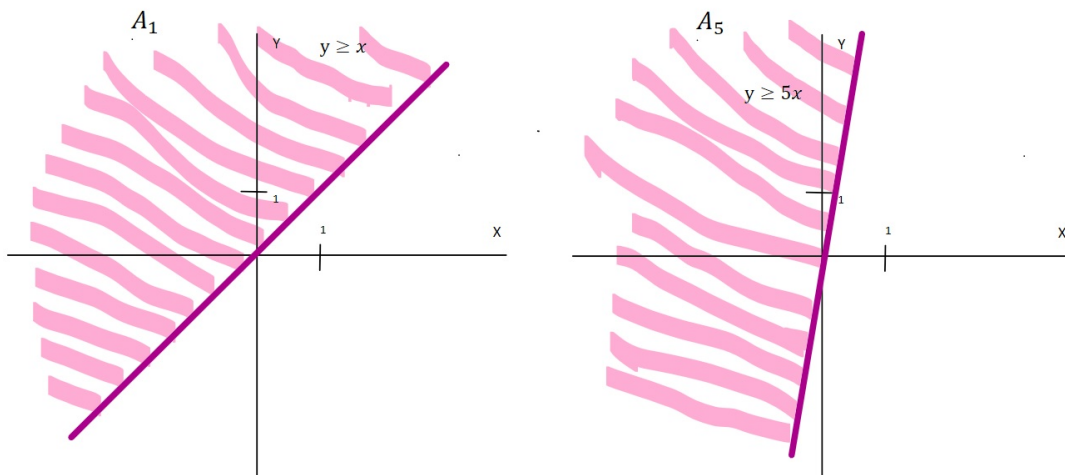
Zauważmy, że dla tej rodziny zachodzi własność  $t_1 < t_2 \Rightarrow A_{t_1} \subseteq A_{t_2}$ ,

czyli zbiory z mniejszymi indeksami są podzbiorem zbiorów z większymi indeksami.

Rodzinę o takiej własności nazywamy rodziną **wstępującą**.

### **Przykład 9.**

Niech  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $T = \mathbb{N}$ ,  $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq t \cdot x\}$ .



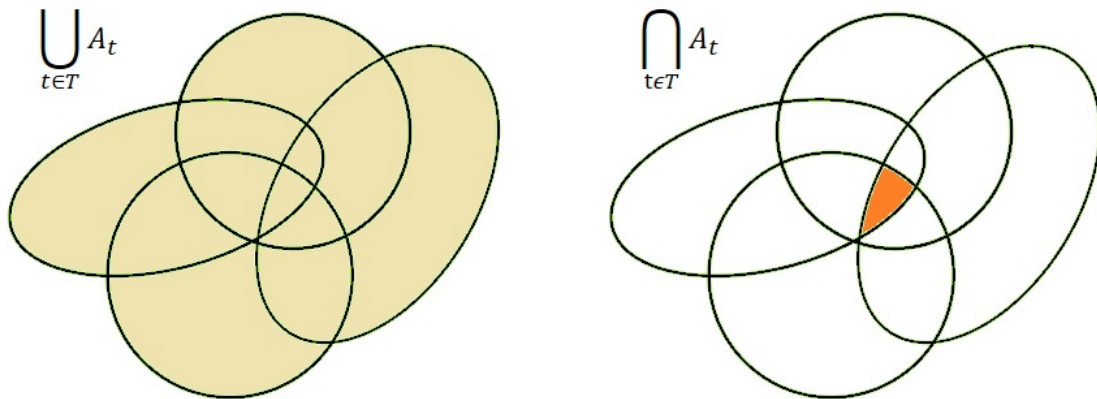
Niech  $(A_t)_{t \in T}$  - dowolna indeksowana rodzina podzbiorów zbioru  $X$ .

Def. **Uogólnioną sumą zbiorów**  $A_t, t \in T$  nazywamy zbiór

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \{x \in X : \exists t \in T \ x \in A_t\}.$$

Def. **Uogólnionym iloczynem (przecięciem) zbiorów**  $A_t, t \in T$  nazywamy zbiór

$$\bigcap_{t \in T} A_t = \{x \in X : \forall t \in T \ x \in A_t\}.$$



**Uwaga:** W przypadku gdy zbiór  $T \subseteq \mathbb{N}$  jest zbiorem  $T = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$  stosowane są oznaczenia:

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n, \quad \bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_n.$$

**Uwaga:** Własności uogólnionej sumy i iloczynu można zapisać następująco:

$$x \in \bigcup_{t \in T} A_t \Leftrightarrow \exists t \in T \ x \in A_t, \quad x \in \bigcap_{t \in T} A_t \Leftrightarrow \forall t \in T \ x \in A_t$$

Uogólniona suma rodziny zbiorów jest najmniejszym zbiorem zawierającym wszystkie zbiory tej rodziny.

Uogólniony iloczyn rodziny zbiorów jest największym zbiorem zawartym w każdym zbiorze tej rodziny.

### **Przykład 10.**

Wyznaczyć uogólnioną sumę oraz iloczyn rodziny zbiorów z przykładu 8.

Dla rodziny przedziałów  $A_t = [\frac{1}{t}, t]$ ,  $T = \mathbb{N}$  mamy  $\bigcup_{t \in T} A_t = (0, +\infty)$ ,

gdyż każda liczba  $x \in (0, +\infty)$  należy do jakiegoś przedziału  $A_t$  (wystarczy dobrać odpowiednio duże  $t$ );

Z kolei  $\bigcap_{t \in T} A_t = \{1\}$ , gdyż tylko liczba 1 należy do wszystkich zbiorów  $A_t$ .

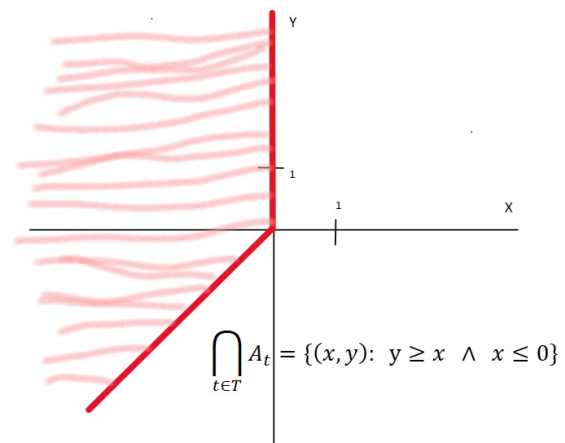
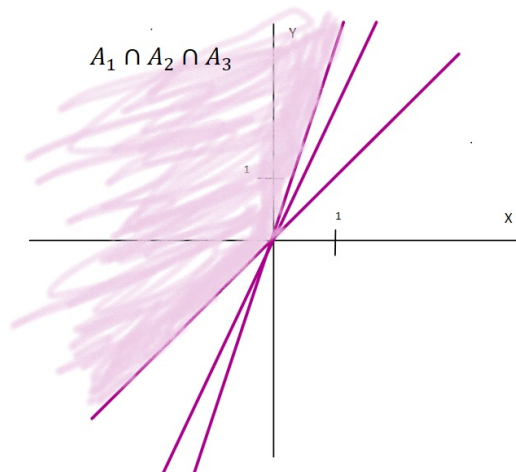
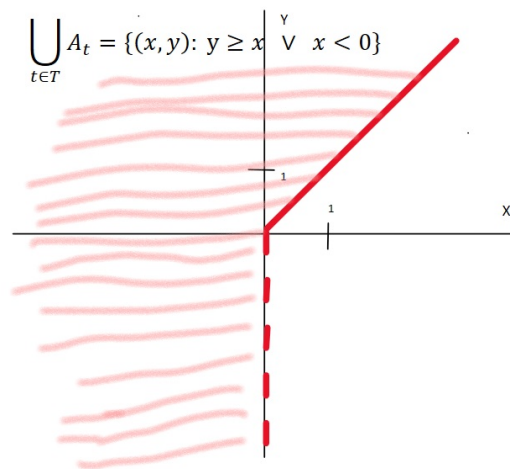
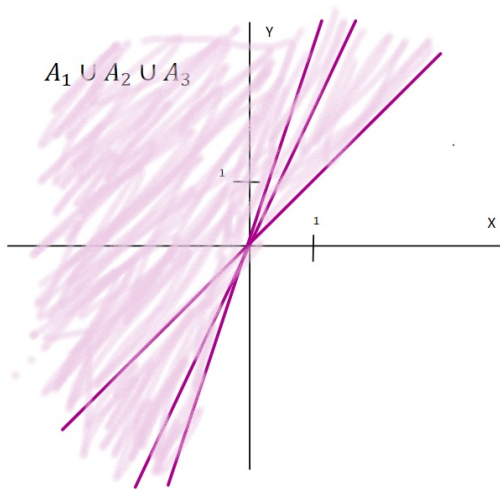
Dla rodziny wstępującej mamy  $\bigcap_{t \in T} A_t = A_1$ , czyli jest to zbiór z najmniejszym indeksem.

### Przykład 11.

Wyznaczyć uogólnioną sumę oraz iloczyn rodziny zbiorów z przykładu 9.

Dla rodziny zbiorów  $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq t \cdot x\}$ ,  $T = \mathbb{N}$

mamy rozwiązania przedstawione na poniższych rysunkach.





### Własności działań uogólnionych

**Tw.** Jeżeli  $(A_t)_{t \in T}$  jest indeksowaną rodziną podzbiorów zbioru  $X$  i  $A \subseteq X$ , to prawdziwe są następujące zależności:

1. Dla każdego  $s \in T$  mamy  $A_s \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t$ .

2. Dla każdego  $s \in T$  mamy  $\bigcap_{t \in T} A_t \subseteq A_s$ .

3. Jeżeli  $S \subseteq T$  to  $\bigcup_{t \in S} A_t \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t$  oraz  $\bigcap_{t \in S} A_t \supseteq \bigcap_{t \in T} A_t$ .

4. Jeżeli istnieją  $t_1, \dots, t_n$  takie, że  $\forall t \in T \ A_t \subseteq A_{t_1} \cup \dots \cup A_{t_n}$ , to

$$\bigcup_{t \in T} (A_t) = A_{t_1} \cup \dots \cup A_{t_n}.$$

5. W szczególności, jeżeli istnieją  $t_1, \dots, t_n$  takie, że  $A_{t_1} \cup \dots \cup A_{t_n} = X$ , to

$$\bigcup_{t \in T} (A_t) = X.$$

6. Jeżeli istnieją  $t_1, \dots, t_n$  takie, że  $\forall t \in T \ A_{t_1} \cap \dots \cap A_{t_n} \subseteq A_t$ , to

$$\bigcap_{t \in T} (A_t) = A_{t_1} \cap \dots \cap A_{t_n}.$$

7. W szczególności, jeżeli istnieją  $t_1, \dots, t_n$  takie, że  $A_{t_1} \cap \dots \cap A_{t_n} = \emptyset$ , to

$$\bigcap_{t \in T} (A_t) = \emptyset.$$

8. Zachodzą prawa de Morgana:

$$\left( \bigcup_{t \in T} A_t \right)' = \bigcap_{t \in T} (A_t)' \quad \text{oraz} \quad \left( \bigcap_{t \in T} A_t \right)' = \bigcup_{t \in T} (A_t)'.$$

**Przykład 12.** Dla rodziny przedziałów  $A_t = [2 \cdot (-1)^t, 2 \cdot (-1)^t + \frac{5}{t}]$ ,  $t \in \mathbb{N}$

wyznaczyć jej uogólnioną sumę i przecięcie.

$$\begin{aligned} A_1 &= [-2, 3], & A_2 &= [2, 4\frac{1}{2}], \\ A_3 &= [-2, -\frac{1}{3}], & A_4 &= [2, 3\frac{1}{4}], \\ A_5 &= [-2, -1], & A_6 &= [2, 2\frac{5}{6}], \dots \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla zbiorów z indeksami parzystymi mamy  $A_{2k} \subseteq A_2 = [2, 4\frac{1}{2}]$ ,

zaś dla zbiorów z indeksami nieparzystymi mamy  $A_{2k-1} \subseteq A_1 = [-2, 3]$ .

Stąd dla każdego  $t \in \mathbb{N}$  mamy  $A_t \subseteq A_1 \cup A_2$ .

Korzystając z własności 4. dostaniemy  $\bigcup_{t \in \mathbb{N}} A_t = A_1 \cup A_2 = [-2, 4\frac{1}{2}]$ .

Zauważmy, że  $A_2 \cap A_3 = \emptyset$ , stąd  $\bigcap_{t \in \mathbb{N}} A_t = \emptyset$  (własność 7).